

5. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι [ΧΗΜΕΙΑ], ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ,

Παράδοση μέχρι 11 Δεκεμβρίου.

- Οι “extra ασκήσεις” δεν παραδίδονται.
- Παραδίδουμε τουλάχιστον 7 από τις ασκήσεις.

Άσκηση 5.1. ([1], Κεφ. 10.1, παράδειγμα 1) Δείξτε με τον ορισμό ότι

$$(\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad (\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Άσκηση 5.2. ([1], Κεφ. 10.1, παράδειγμα 6) (α) Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} = 1.$$

Άσκηση 5.3 (Γεωμετρική σειρά). ([1], Κεφ. 10.2, παράδειγμα 1) (α) Βρείτε το αποτέλεσμα για την σειρά

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

όπου τα a, r είναι πραγματικοί αριθμοί και $a \neq 0$.

(β) Βρείτε το αποτέλεσμα της σειράς

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

Άσκηση 5.4 (Αλλαγή δείκτη). Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Άσκηση 5.5. ([3], Κεφ. 4) Βρείτε την σειρά Taylor γύρω από το $x = 0$ για την συνάρτηση $\ln(1+x)$.

Άσκηση 5.6. Βρείτε την σειρά Taylor γύρω από το $x = 0$ για την συνάρτηση $\sin x$. (Γράψτε την σειρά χρησιμοποιώντας τους τρεις πρώτους όρους και τον γενικό όρο.)

Άσκηση 5.7. ([3], Κεφ. 4.1.1) Βρείτε το ανάπτυγμα Maclaurin της

$$\frac{1}{x+1}, \quad x > -1.$$

Γράψτε την σειρά χρησιμοποιώντας τους τρεις πρώτους όρους και τον γενικό όρο. [Υπόδειξη. Μπορείτε να πάρετε την παράγωγο της $\ln(1+x)$ καθώς και της αντίστοιχης σειράς Taylor.]

Άσκηση 5.8. ([3], Κεφ. 4.1.2, Παράδειγμα 4.1.1.) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor για την $\sinh x$ γύρω από το $x = 0$. Γράψτε την σειρά χρησιμοποιώντας το σύμβολο $\sum$.

Άσκηση 5.9. ([3], Κεφ. 4.1.2, Παράδειγμα 4.1.2.) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το $x = 0$ της

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Γράψτε την σειρά χρησιμοποιώντας τους τρεις πρώτους όρους και τον γενικό όρο. [Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την σειρά Taylor της $1/(1+x)$.]

Άσκηση 5.10. ([3], Κεφ. 4.1.2, Παράδειγμα 4.1.3.) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το $x = 0$ της $f(x) = \arctan x$.

[Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds.$$

Χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor της ολοκληρωταίας και ολοκληρώνουμε όρο προς όρο.]

Άσκηση 5.11. ([1], Κεφ. 10.10, Παράδειγμα 2.) Βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της σειράς Taylor γύρω από το $x = 0$ για την

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Δοκιμάστε να βρείτε τον γενικό όρο.

[Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την διωνυμική σειρά.]

Άσκηση 5.12. ([1], Κεφ. 10.9, Παράδειγμα 4β.) Βρείτε τους πρώτους τέσσερις όρους της σειράς Taylor γύρω από το $x = 0$ για την συνάρτηση

$$f(x) = e^x \cos x.$$

Άσκηση 5.13. (α) Γράψτε την σειρά Taylor γύρω από το $x = 0$ για την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

(β) Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Άσκηση 5.14. ([3], Κεφ. 4.1.2, Παράδειγμα 4.1.6.), ([2], Κεφ. 10.4, Παράδειγμα 1 Βρείτε τα όρια των συναρτήσεων

$$(α) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x - 1} \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{3x^4}.$$

Άσκηση 5.15. ([2], Κεφ. 10.4, παράδειγμα 7) Βρείτε την συνάρτηση η οποία δίνεται από την σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-2x)^k}{k!}$$

Ποια είναι η τιμή της συνάρτησης για $x = 1/2$;

Άσκηση 5.16. ([5], Κεφ. 2, άσκηση 2.1) Παραστήστε γραφικά την περιοδική συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

η οποία θεωρείται ότι έχει περίοδο $P = 2\pi$.

Άσκηση 5.17. ([5], Κεφ. 2, άσκηση 2.3) Δείξτε ότι

$$(α) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x dx = 0 \quad (β) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos(nx) dx = 0,$$

όπου n εείναι ακέραιος.

[Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τριγωνομετρικές ταυτότητες.]

Άσκηση 5.18. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ -1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

[Υπόδειξη. Ελέγξτε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.]

Άσκηση 5.19. ([5], Κεφ. 2, άσκηση 2.12β) Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Extra ασκήσεις.

Άσκηση 5.20. ([1], Κεφ. 10.2, παράδειγμα 5) Βρείτε το άθροισμα της τηλεσκοπικής σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

[Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.]

Άσκηση 5.21. Βρείτε την τιμή του e χρησιμοποιώντας μία σειρά Taylor.

Άσκηση 5.22. ([2], Κεφ. 10.4, παράδειγμα 5) (α) Βρείτε την σειρά Taylor γύρω από το $x = 0$ για την συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

[Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τη γνωστή σειρά Taylor για την e^x .]

(β) Προσεγγίστε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Άσκηση 5.23. ([5], Κεφ. 2, άσκηση 2.3) Δείξτε ότι

$$(\alpha) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

$$(\beta) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

$$(\gamma) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0.$$

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] J. Hass, C. Heil, M. D. Weir, “*Thomas: Απειροστικός Λογισμός*”, μετάφραση της 14ης αμερικανικής έκδοσης (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- [2] W. Briggs, L. Cochran, B. Gillett, E. Schulz, “*Απειροστικός Λογισμός*” (Εκδόσεις Κριτική, 2018).
- [3] Ι. Δ. Πλατής, «*Μαθηματικά Ι: Πρόχειρες Σημειώσεις*» (2019).
- [4] E. Steiner, “*The Chemistry Maths Book*”, 2nd Edition (Oxford University Press).
- [5] Murray R. Spiegel, “*Ανάλυση Fourier*”, Schaum’s Outline Series (McGRAW HILL, ΕΣΠΙ).