

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι [ΧΗΜΕΙΑ], ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ, ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Παράδοση μέχρι Πέμπτη ?? Οκτωβρίου

- Οι “extra ασκήσεις” δεν παραδίδονται.
- Παραδίδουμε τουλάχιστον 7 από τις ασκήσεις (όποιες προτιμάμε και δεν πειράζει αν έχουν λάθη).

Άσκηση 3.1. Βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$(\alpha) \int \frac{1}{x^2} dx, \quad (\beta) \int \cos(ax) dx, \quad (\gamma) \int \left(\frac{5}{t^2} + 4t^2 \right) dt, \quad (\delta) \int \frac{1}{x+3} dx,$$

όπου a είναι σταθερά.

Άσκηση 3.2. Η επιτάχυνση ενός αυτοκινήτου είναι $a = c$ σταθερή. (α) Βρείτε την ταχύτητά του, $v(t)$. (β) Βρείτε την θέση του, $x(t)$.

Άσκηση 3.3. Η επιτάχυνση ενός αυτοκινήτου είναι $a = ct$ όπου c σταθερά. Βρείτε την ταχύτητά του $v(t)$.

Άσκηση 3.4. (α) Έστω $f(x)$ περιττή συνάρτηση. Βρείτε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-a}^a f(x)dx$. (β) Έστω $f(x)$ άρτια συνάρτηση. Αν είναι γνωστό το $\int_0^a f(x)dx$, βρείτε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-a}^a f(x)dx$.

Άσκηση 3.5. (α) Έστω δύο συναρτήσεις $f(x) > g(x) > 0$ ορισμένες στο διάστημα $[a, b]$. Ποιο είναι το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων των δύο συναρτήσεων; (β) Βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, 1]$.

Άσκηση 3.6. Υπολογίστε το εμβαδό το οποίο περικλείεται από τον άξονα x και το γράφημα της $f(x) = 1 - x^2$. [Υπόδειξη. Θα χρειαστεί να βρείτε τις ρίζες της $f(x) = 0$.]

Άσκηση 3.7. Με χρήση γνωστών εμβαδών, βρείτε τα

$$(\alpha) \int_{-2}^1 |x| dx, \quad (\beta) \int_{-1}^1 (1 - |x|) dx.$$

Άσκηση 3.8. (α) Δείξτε ότι

$$\int_0^\pi \sin x dx \leq \pi.$$

(β) Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $\sin x \leq x$, η οποία ισχύει για $x \geq 0$ για να βρείτε άνω φράγμα της τιμής του

$$\int_0^1 \sin x dx.$$

Άσκηση 3.9. Βρείτε άνω και κάτω φράγματα της τιμής του

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Άσκηση 3.10. Υπολογίστε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$(\alpha) \int_{-2}^2 \frac{1}{(x+3)^2} dx, \quad (\beta) \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad (\gamma) \int_0^{\pi} (1+\cos x) dx, \quad (\delta) \int_{-1}^1 (t+1)(t^2+4) dt.$$

Άσκηση 3.11. Βρείτε τις παραγώγους

$$(\alpha) \frac{d}{dx} \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt, \quad (\beta) \frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t dt, \quad (\gamma) \frac{d}{dt} \int_0^{t^4} \sqrt{u} du.$$

Άσκηση 3.12. Έστω ότι

$$\int_1^x f(t) dt = x^2 - 2x + 1.$$

Βρείτε την $f(x)$.

Extra ασκήσεις.

Άσκηση 3.13. Υπολογίστε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$(\alpha) \int_{-1}^1 x^{299} dx, \quad (\beta) \int_{-1}^1 |x| dx, \quad (\gamma) \int_0^{\pi} (\cos x + |\cos x|) dx, \quad (\delta) \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Άσκηση 3.14. Υπολογίστε το

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^{u(x)} f(t) dt.$$