

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι [ΧΗΜΕΙΑ], ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ, ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Παράδοση μέχρι Πέμπτη 16 Οκτωβρίου

- Οι “extra ασκήσεις” δεν παραδίδονται.
- Παραδίδουμε τουλάχιστον 10 από τις ασκήσεις (όποιες προτιμάμε και δεν πειράζει αν έχουν λάθη).

Άσκηση 2.1. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 2}.$$

(α) Σχεδιάστε την συνάρτηση (με υπολογιστή). (β) Ποιο το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; [Υπόδειξη. Εφαρμόστε τις ιδιότητες των ορίων.]

Άσκηση 2.2. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x \sin x}.$$

(α) Σχεδιάστε την συνάρτηση (με υπολογιστή). (β) Δείτε στην γραφική παράσταση ποιο είναι το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

Άσκηση 2.3. Ποιο το όριο όταν $x \rightarrow 0$ για κάθε μία από τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$(a) f(x) = \frac{\sin x}{x} + 4, \quad (b) f(x) = \frac{\sin x}{x} + \cos x.$$

Άσκηση 2.4. Σχεδιάστε (για κάποια τιμή του b) την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$$

(α) Για ποια τιμή του b είναι η συνάρτηση συνεχής σε κάθε x ; (β) Είναι η συνάρτηση διαφορίσιμη για αυτή την τιμή του b ;

Άσκηση 2.5. Σχεδιάστε (για κάποια τιμή του b) την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

(α) Υπάρχει τιμή του b για την οποία είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x = 0$; (β) Διαφορίσιμη στο $x = 0$;

Άσκηση 2.6. Έστω η

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

(α) Είναι η συνάρτηση συνεχής; (β) Είναι η συνάρτηση διαφορίσιμη;

Άσκηση 2.7. Ορίστε το $g(4)$ με τρόπο ώστε η

$$g(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}$$

να είναι συνεχής στο $x = 4$.

Άσκηση 2.8. Κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = \frac{x+4}{x}.$$

[Υπόδειξη. Πρώτα προσδιορίστε το πεδίο ορισμού της.]

Άσκηση 2.9. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

$$\begin{aligned} (\alpha) y &= x^{3/2}, & (\beta) y &= 2x^{1/3}, & (\gamma) y &= (2x^2 - 1)(x^2 + 4), & (\delta) y &= \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 4}, \\ (\epsilon) y &= \sin(3x) + \cos^3(x), & (\zeta) R(\theta) &= \sqrt{4\theta + 1}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.10. Βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

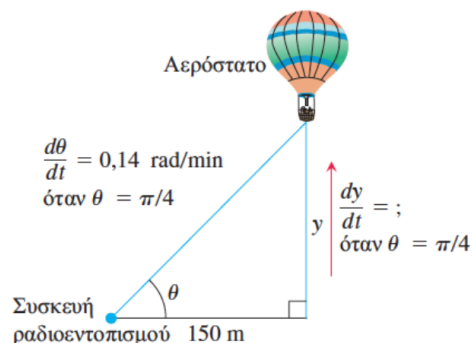
$$(a) y = \arcsin x, \quad (b) y = \arctan x.$$

Άσκηση 2.11 (Αντίδραση οργανισμού σε φάρμακο). Η αντίδραση R οργανισμού σε μία δόση φαρμάκου M μπορεί μερικές φορές να παρασταθεί από την εξίσωση

$$R = M^2 \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right), \quad C > 0.$$

Το R μετριέται σε βαθμούς καθώς ο οργανισμός αντιδρά μεταβάλλοντας τη θερμοκρασία του. (α) Βρείτε την ευαισθησία του οργανισμού στο φάρμακο (δηλαδή, την παράγωγο dR/dM). (β) Για ποια ποσότητα φαρμάκου είναι μέγιστη η ευαισθησία;

Άσκηση 2.12. Ένα αερόστατο που ανυψώνεται κατακόρυφα από επίπεδη περιοχή εντοπίζεται από συσκευή ραδιοεντοπισμού που απέχει 150 m από το σημείο απογείωσης. Την στιγμή που η γωνία ανύψωσης (ως προς την συσκευή ραδιοεντοπισμού) είναι $\pi/4$, ο ρυθμός αύξησης της γωνίας αυτής είναι 0.14 rad/min. Πόση είναι τότε η ταχύτητα ανύψωσης του αερόστατου;



Άσκηση 2.13. Ένα σωματίδιο κινούμενο στον χρόνο t διανύει απόσταση

$$s(t) = t^3 - 2t + 1.$$

Σε ποια χρονική στιγμή έχει μηδενική επιτάχυνση; [Υπόδειξη. Σχεδιάστε την συνάρτηση για να καταλάβεται την έννοια της επιτάχυνσης.]

Άσκηση 2.14. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα και σημεία καμπής της

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x.$$

Άσκηση 2.15. Η πιθανότητα P ενός μορίου μάζας m σε ένα αέριο με θερμοκρασία T να έχει ταχύτητα v δίνεται από την

$$P(T) = v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)},$$

όπου k είναι η σταθερά του Boltzmann. Δείξτε ότι η μέγιστη πιθανότητα επιτυγχάνεται για $v = \sqrt{3kT/m}$.

Άσκηση 2.16 (Διάδοση σφάλματος). Η μέτρηση της περιφέρειας του ισιμερινού μιας σφαίρας δίνει 10 cm με πιθανό σφάλμα 0.4 cm. Η μέτρηση αυτή χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε την ακτίνα. Στη συνέχεια, η ακτίνα χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της επιφάνειας και του όγκου της σφαίρας. Εκτιμήστε τα ποσοστιαία σφάλματα στις υπολογιζόμενες τιμές (α) της ακτίνας, (β) της επιφάνειας και (γ) του όγκου της σφαίρας. [Υπόδειξη. Θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε την έννοια του διαφορικού.]

Extra ασκήσεις.

Άσκηση 2.17. Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y(x)$ η οποία ορίζεται από την

$$y^2 + x^2 = 1, \quad y > 0.$$

Άσκηση 2.18 (Το φύλλο του Καρτεσίου). Βρείτε την κλίση του φύλλου του Καρτεσίου

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0.$$

[Δείτε Thomas, κεφ. 3.7, άσκ. 46.]

Άσκηση 2.19 (Εκτίμηση ύψους κτηρίου). Ένας τεχνικός στέκεται σε απόσταση $s = 30$ m από τη βάση κτηρίου, μετρά γωνία $\theta = 75^\circ$ με την οποία φαίνεται η κορυφή του κτηρίου. Αν θέλουμε το σφάλμα στην εκτίμηση του ύψους να μην υπερβαίνει το 4%, με πόση ακρίβεια πρέπει να μετρηθεί η γωνία;

Άσκηση 2.20. Μελετήστε την συνάρτηση

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}.$$

Μια τέτοια συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ότι παριστάνει το μέσο ημερήσιο κόστος ανα μονάδα προϊόντος μιας επιχείρησης (Thomas).

Άσκηση 2.21. Για την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2},$$

(α) βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής και (β) σχεδιάστε την γραφική παράσταση.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] J. Hass, C. Heil, M. D. Weir, “*Thomas: Απειροστικός Λογισμός*”, μετάφραση της 14ης αμερικανικής έκδοσης (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- [2] Ι. Δ. Πλατής, «*Μαθηματικά Ι: Πρόχειρες Σημειώσεις*» (2019).
- [3] E. Steiner, “*The Chemistry Maths Book*”, 2nd Edition (Oxford University Press).