

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 12

Άσκηση 12.1 Εάν $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ είναι η απεικόνιση $L(p) = xp'(x) + x^2p'(x)$ (όπου $p'(x)$ είναι η παράγωγος του πολυωνύμου $p(x)$) βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις

- a. $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}, \mathcal{C}_1 = \{1, x, x^2, x^3\},$
- b. $\mathcal{B}_2 = \{1 + x, x + x^2, x^2\}, \mathcal{C}_2 = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3\}.$

Άσκηση 12.2 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$

$$L(x, y) = \left(\frac{23}{10}x + \frac{18}{5}y, \frac{18}{5}x + \frac{1}{5}y \right)$$

και η βάση $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}, v_1 = (4, 3), v_2 = \left(-\frac{3}{2}, 2\right).$

- a. Βρείτε τον πίνακα της L ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.
- b. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στην $\mathcal{B}$, και τον αντίστροφό του για να βρείτε τον πίνακα της L ως προς την βάση $\mathcal{B}$.

Άσκηση 12.3 Θεωρούμε τις βάσεις $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ και $\mathcal{C} = \{(1, 0, -1), (1, 2, 0), (1, 1, 2)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

- a. Υπολογίστε τους πίνακες αλλαγής βάσης από την $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{C}$ και αντίστροφα.
- b. Έστω $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε το $L(1, 1, 1)$.

Άσκηση 12.4 Δείξτε ότι κάθε αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας είναι πίνακας αλλαγής βάσης για κάποιες βάσεις.

Άσκηση 12.5 Δύο $m \times n$ πίνακες A και B είναι *ισοδύναμοι* εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q , μεγέθους $n \times n$ και $m \times m$ αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε $B = Q^{-1}AP$. Δείξτε ότι δύο ισοδύναμοι πίνακες έχουν την ίδια τάξη.