

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 12

Άσκηση 12.1 Εάν $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ είναι η απεικόνιση $L(p) = xp'(x) + x^2p'(x)$ (όπου $p'(x)$ είναι η παράγωγος του πολυωνύμου $p(x)$) βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις

a. $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}, \mathcal{C}_1 = \{1, x, x^2, x^3\},$

b. $\mathcal{B}_2 = \{1 + x, x + x^2, x^2\}, \mathcal{C}_2 = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3\}.$

Απάντηση:

a. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L(1) &= 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ L(x) &= x + x^2 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ L(x^2) &= 2x^2 + 2x^3 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3. \end{aligned}$$

Άρα παίρνουμε ότι

$$[L]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{C}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. Ομοίως με το προηγούμενο ερώτημα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} L(1 + x) &= x + x^2 = 0 \cdot (1 + x) + 1 \cdot (x + x^2) + 0 \cdot (x^2 + x^3) + 0 \cdot x^3, \\ L(x + x^2) &= x + 2x^2 + x^3 = 0 \cdot (1 + x) + 1 \cdot (x + x^2) + 1 \cdot (x^2 + x^3) + 0 \cdot x^3, \\ L(x^2) &= 2x^2 + 2x^3 = 0 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (x + x^2) + 2 \cdot (x^2 + x^3) + 0 \cdot x^3. \end{aligned}$$

Άρα παίρνουμε ότι

$$[L]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 12.2 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(x, y) = \left(\frac{23}{10}x + \frac{18}{5}y, \frac{18}{5}x + \frac{1}{5}y \right)$$

και η βάση $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}, v_1 = (4, 3), v_2 = (-\frac{3}{2}, 2).$

- Βρείτε τον πίνακα της L ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.
- Χρησιμοποιήστε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στην $\mathcal{B}$, και τον αντίστροφό του για να βρείτε τον πίνακα της L ως προς την βάση $\mathcal{B}$.

Απάντηση:

- Ονομάζουμε $\mathcal{E}$ την κανονική βάση. Εύκολα βλέπουμε ότι $L(1, 0) = (\frac{23}{10}, \frac{18}{5})$ και $L(0, 1) = (\frac{18}{5}, \frac{1}{5})$. Επομένως

$$[L]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{23}{10} & \frac{18}{5} \\ \frac{18}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

- Από τον ορισμό των v_1, v_2 προκύπτει άμεσα ότι

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Έτσι παίρνουμε ότι

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = ([\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Έτσι τελικά υπολογίζουμε ότι

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [\mathbf{1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot [L]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \cdot [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 12.3 Θεωρούμε τις βάσεις $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ και $\mathcal{C} = \{(1, 0, -1), (1, 2, 0), (1, 1, 2)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

- Υπολογίστε τους πίνακες αλλαγής βάσης από την $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{C}$ και αντίστροφα.
- Έστω $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε το $L(1, 1, 1)$.

Απάντηση:

- Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι η κανονική βάση. Έτσι, αν θέλουμε η έκφραση των στοιχείων της $\mathcal{C}$ ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της $\mathcal{B}$ είναι άμεση και καταλήγουμε ότι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{B}$ θα έχει ως στήλες τα διανύσματα της $\mathcal{C}$. Άρα

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Από το παραπάνω, υπολογίζουμε

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = ([\mathbf{1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε ότι

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [\mathbf{1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι η κανονική βάση, αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$, θα έχουμε ότι $L(x) = [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}x$, με άλλα λόγια παίρνουμε

$$L(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 12.4 Δείξτε ότι κάθε αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας είναι πίνακας αλλαγής βάσης για κάποιες βάσεις.

Απάντηση: Έστω $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ οι στήλες του. Τότε το σύνολο $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$. Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική με προηγούμενες ασκήσεις, εύκολα βλέπουμε ότι, αν $\mathcal{B}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε ο $A = [\mathbf{1}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Άσκηση 12.5 Δύο $m \times n$ πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q , μεγέθους $n \times n$ και $m \times m$ αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε $B = Q^{-1}AP$. Δείξτε ότι δύο ισοδύναμοι πίνακες έχουν την ίδια τάξη.

Υπόδειξη: Έστω A και B ισοδύναμοι πίνακες και P, Q οι αντιστρέψιμοι πίνακες, τέτοιοι ώστε

$$B = Q^{-1}AP.$$

Από την προηγούμενη άσκηση, οι P και Q θα είναι πίνακες αλλαγής βάσης για κάποιες βάσεις. Καταλήγουμε ότι οι A και B μπορούν να ιδωθούν ως πίνακες της ίδιας απεικόνισης, ως προς διαφορετικές βάσεις. Ως εκ τούτου οι δύο πίνακες έχουν την ίδια τάξη.