

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 11

Άσκηση 11.1 Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ με $n > m$ και γραμμικές απεικονίσεις $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η $M \circ L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ δεν είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 11.2 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(1, 1, 2) = (1, 0, 2)$, $f(0, -1, 1) = (1, 1, 1)$, $f(1, 0, 2) = (3, 2, 4)$.

- Βρείτε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης, $[f]_{\mathcal{E}}$, όπου $\mathcal{E}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.
- Δείξτε ότι η εικόνα της f είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.
- Υπολογίστε τον πυρήνα της f .
- Βρείτε ένα υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$, διάστασης 2, τέτοιο ώστε $f(V) = \text{im}(f)$.
- Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $f(v) = (0, 1, -1)$.
- Βρείτε ένα υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε $f(W) = \langle (0, 1, -1) \rangle$.
- Είναι η $f : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα-προς-ένα;

Άσκηση 11.3 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y, z) = (x - y, -x + 2y + z)$ και οι βάσεις $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ και $\mathcal{C} = \{(1, 1), (0, 1)\}$ των χώρων $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα.

- Βρείτε τον πίνακα $[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
- Υπολογίστε τη διάσταση του πυρήνα και της εικόνας της L .

Άσκηση 11.4 Έστω V, W γραμμικοί χώροι με βάσεις $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ και $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ αντίστοιχα. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : V \rightarrow W$, με $L(v_1) = w_1 + 2w_2 + w_3$, $L(v_2) = -w_1 + w_3$, $L(v_3) = -w_1 + 2w_2 + 3w_3$, $L(v_4) = 2w_2 + 2w_3$. Βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της L .

Άσκηση 11.5 Έστω V γραμμικός χώρος και $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ μία βάση του. Ορίζουμε τις γραμμικές μορφές $v_j^* \in V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ για $1 \leq j \leq n$, με

$$v_j^*(v_i) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } i = j \\ 0 & , \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Δείξτε ότι το σύνολο $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ είναι βάση του V^* .

Άσκηση 11.6 Έστω V γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n \setminus V$. Δείξτε ότι υπάρχει απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(v) = 0$ για κάθε $v \in V$ και $f(x) = 1$.

Άσκηση 11.7 Υπολογίστε τη δυϊκή βάση της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$.