

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 11

Άσκηση 11.1 Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ με $n > m$ και γραμμικές απεικονίσεις $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η $M \circ L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ δεν είναι ισομορφισμός.

Απάντηση: Αν ήταν ισομορφισμός, τότε θα ήταν επί. Άρα για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $M \circ L(x) = z$. Άρα $M(L(x)) = z$. Τότε όμως και η απεικόνιση $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι επί: για $z \in \mathbb{R}^n$, υπάρχει $y \in \mathbb{R}^m$ (το $y = L(x)$) τέτοιο ώστε $M(y) = z$. Αυτό σημαίνει ότι $\text{im}(M) = \mathbb{R}^n$. Όμως τότε $n = \dim \text{im}(L) \leq m$, το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 11.2 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(1, 1, 2) = (1, 0, 2)$, $f(0, -1, 1) = (1, 1, 1)$, $f(1, 0, 2) = (3, 2, 4)$.

- Βρείτε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης, $[f]_{\mathcal{E}}$, όπου $\mathcal{E}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.
- Δείξτε ότι η εικόνα της f είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.
- Υπολογίστε τον πυρήνα της f .
- Βρείτε ένα υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$, διάστασης 2, τέτοιο ώστε $f(V) = \text{im}(f)$.
- Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $f(v) = (0, 1, -1)$.
- Βρείτε ένα υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε $f(W) = \langle (0, 1, -1) \rangle$.
- Είναι η $f : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα-προς-ένα;

Απάντηση:

- Πρέπει να υπολογίσουμε τα διανύσματα $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$, $f(0, 0, 1)$. Θα βρούμε τον τύπο της f . Αρχικά θα γράψουμε το τυχόν $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ως προς η βάση $\{(1, 1, 2), (0, -1, 1), (1, 0, 2)\}$.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(-2a + b + c, -2a + c, 3a - b - c)$. Άρα

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= (-2a + b + c)f(1, 1, 2) + (-2a + c)f(0, -1, 1) + (3a - b - c)f(1, 0, 2) \\ &= (-2a + b + c)(1, 0, 2) + (-2a + c)(1, 1, 1) + (3a - b - c)(3, 2, 4) \\ &= (5a - 2b - c, 4a - 2b - c, 6a - 2b - c) \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε $f(1, 0, 0) = (5, 4, 6)$, $f(0, 1, 0) = (-2, -2, -2)$, $f(0, 0, 1) = (-1, -1, -1)$. Άρα

$$[f]_{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Η εικόνα της f είναι ίση με το χώρο $\mathcal{R}(A)$. Με απαλοιφή Gauss στον πίνακα A βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Βλέπουμε ότι ο η τάξη είναι 2 και οι δύο πρώτες στήλες του A είναι βάση του $\mathcal{R}(A)$. Δηλαδή

$$\mathcal{R}(A) = \{x(5, 4, 6) + y(-2, -2, -2) : x, y \in \mathbb{R}^3\}$$

το οποίο είναι το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $(5, 4, 6), (-2, -2, -2)$.

c. Ο πυρήνας της f είναι ίσος με το μηδενόχωρο του A , δηλαδή της λύσεις του συστήματος $Ax = 0$. Έχουμε ήδη κάνει απαλοιφή στον πίνακα A , οπότε υπολογίζουμε τις λύσεις με ανάδρομη αντικατάσταση:

$$\mathcal{N}(A) = \{z(0, -1/2, 1) : z \in \mathbb{R}\} = \langle(0, 1/2, 1)\rangle = \langle(0, 1, 2)\rangle.$$

d. Αρκεί να βρω δύο διανύσματα $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $f(v_1) = (5, 4, 6)$ και $f(v_2) = (-2, -2, -2)$. Τότε θα έχω

$$f(\langle v_1, v_2 \rangle) = \langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle(5, 4, 6), (-2, -2, -2)\rangle = \text{im}(f).$$

Παρατηρώ ότι $f(v) = Av$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^3$. Και τα $(5, 4, 6), (-2, -2, -2)$ είναι οι δυο πρώτες στήλες του A . Οπότε $A \cdot (1, 0, 0)^T = (5, 4, 6)^T$ και $A \cdot (0, 1, 0)^T = (-2, -2, -2)^T$. Άρα ένας τέτοιος υπόχωρος είναι ο

$$V = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle.$$

e. Το διάνυσμα $(0, 1, -1)$ είναι ίσο με $f(v)$ για κάποιο $v \in \mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν ανήκει στην εικόνα της f . Ελέγχω εάν το σύστημα $Av = (0, 1, -1)$ έχει λύση:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Το σύστημα έχει τις λύσεις $\{(-1, -5/2, 0) + z(0, -1/2, 1) : z \in \mathbb{R}\}$. Άρα ένα διάνυσμα v τέτοιο ώστε $f(v) = (0, 1, -1)$ είναι το $v = (-1 - 5/2, 0) + (0, -1/2, 1) = (-1, -3, 1)$.

f. Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι $f(-1, -3, 1) = (0, 1, -1)$. Έαν βρούμε ένα ακόμη διάνυσμα u τέτοιο ώστε $f(u) = (0, 1, -1)$ και το σύνολο $\{v, u\}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε ο υπόχωρος $W = \langle v, u \rangle$ θα έχει διάσταση 2 και επίσης $f(W) = \langle f(v), f(u) \rangle = \langle(0, 1, -1)\rangle$. Το διάνυσμα u θα ανήκει στο σύνολο $\{(-1, -5/2, 0) + z(0, -1/2, 1) : z \in \mathbb{R}\}$. Ας πάρω το $u = (-1, -5/2, 0) - (0, -1/2, 1) = (-1, -2, -1)$. Παρατηρήστε ότι το $\{v, u\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, οπότε ένα υπόχωρος που ικανοποιεί τις συνθήκες είναι ο

$$W = \langle(-1, -3, 1), (-1, -2, -1)\rangle.$$

g. Η απεικόνιση $f : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ δεν είναι ένα-προς-ένα, αφού η διάσταση του W είναι 2, ενώ από κατασκευή η εικόνα $f(W) = \langle(0, 1, -1)\rangle$ έχει διάσταση 1. Εάν η f ήταν ένα-προς-ένα, τότε οι χώροι W και $f(W)$ θα ήταν ισόμορφοι και θα είχαν την ίδια διάσταση.

Μπορώ να καταλήξω στο ίδιο συμπέρασμα και παρατηρώντας ότι $f(-1, -3, 1) = f(-1, -2, -1)$.

Άσκηση 11.3 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y, z) = (x - y, -x + 2y + z)$ και οι βάσεις $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ και $\mathcal{C} = \{(1, 1), (0, 1)\}$ των χώρων $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα.

a. Βρείτε τον πίνακα $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

b. Υπολογίστε τη διάσταση του πυρήνα και της εικόνας της L .

Απάντηση: Υπολογίστε τον πίνακα $A = [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Γνωρίζουμε ότι $\dim \operatorname{im}(L) = \dim \mathcal{R}(A)$. Υπολογίζουμε την τάξη r του πίνακα A . Τότε $\dim \operatorname{im}(L) = r$ και $\dim \ker(L) = 3 - r$.

Άσκηση 11.4 Έστω V, W γραμμικοί χώροι με βάσεις $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ και $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ αντίστοιχα. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : V \rightarrow W$, με $L(v_1) = w_1 + 2w_2 + w_3$, $L(v_2) = -w_1 + w_3$, $L(v_3) = -w_1 + 2w_2 + 3w_3$, $L(v_4) = 2w_2 + 2w_3$. Βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της L .

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον πίνακα $A = [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} v \in \ker(L) &\Leftrightarrow L(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \iota_{\mathcal{C}}(L(v)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{L}(\iota_{\mathcal{B}}(v)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \iota_{\mathcal{B}}(v) \in \ker(\tilde{L}) \\ &\Leftrightarrow \iota_{\mathcal{B}}(v) \in \mathcal{N}(A). \end{aligned}$$

Αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} w \in \operatorname{im}(L) &\Leftrightarrow w = L(v) \text{ για κάποιο } v \in V \\ &\Leftrightarrow \iota_{\mathcal{C}}(w) = \iota_{\mathcal{C}}(L(v)) \text{ για κάποιο } v \in V \\ &\Leftrightarrow \iota_{\mathcal{C}}(w) = \tilde{L}(\iota_{\mathcal{B}}(v)) \text{ για κάποιο } v \in V \\ &\Leftrightarrow \iota_{\mathcal{C}}(w) \in \operatorname{im}(\tilde{L}) \\ &\Leftrightarrow \iota_{\mathcal{C}}(w) \in \mathcal{R}(A). \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι για να υπολογίσουμε τον πυρήνα και την εικόνα της L μπορούμε να δουλέψουμε με διανύσματα συντεταγμένων ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Με ανάδρομη αντικατάσταση υπολογίζουμε $\mathcal{N}(A) = \{z(-1, -2, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, -2, 1, 0), (-1, -1, 0, 1) \rangle$. Άρα $\ker(L) = \langle -v_1 - 2v_2 + v_3, -v_1 - v_2 + v_4 \rangle$. Επίσης, βλέπουμε ότι $\mathcal{R}(A) = \langle (1, 2, 1), (-1, 0, 1) \rangle$, οπότε $\operatorname{im}(L) = \langle w_1 + 2w_2 + w_3, -w_1 + w_3 \rangle$.

Άσκηση 11.5 Έστω V γραμμικός χώρος και $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ μία βάση του. Ορίζουμε τις γραμμικές μορφές $v_j^* \in V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ για $1 \leq j \leq n$, με

$$v_j^*(v_i) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } i = j \\ 0 & , \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Δείξτε ότι το σύνολο $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ είναι βάση του V^* .

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι $\dim V^* = \dim V = n$. Άρα το σύνολο $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ είναι βάση του χώρου V^* αν και μόνο αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Έστω ότι $f = c_1 v_1^* + \dots + c_n v_n^* = 0$. Τότε $f(v_i) = 0$ για $1 \leq i \leq n$. Όμως $f(v_i) = \sum_{j=1}^n c_j v_j^*(v_i) = c_i$ για $1 \leq i \leq n$. Άρα $c_i = 0$ για κάθε i .

Άσκηση 11.6 Έστω V γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n \setminus V$. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(v) = 0$ για κάθε $v \in V$ και $f(x) = 1$.

Απάντηση: Έστω $\{v_1, \dots, v_m\}$ μία βάση του V . Το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m, x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, οπότε μπορεί να επεκταθεί σε βάση $\{v_1, \dots, v_m, x, \dots\}$ του $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $f = x^*$ (της δυϊκής βάσης) ικανοποιεί τις ζητούμενες συνθήκες.

Άσκηση 11.7 Υπολογίστε τη δυϊκή βάση της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$.

Απάντηση: Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Τότε

$$e_j^*(x_1, \dots, x_n) = e_j^* \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i e_j^*(e_i) = x_j, \quad \text{για } 1 \leq j \leq n.$$

Δηλαδή, η απεικόνιση e_j^* είναι η προβολή στην j συντεταγμένη.