

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 10

Άσκηση 10.1 Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του $u = (6, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ ως προς την βάση $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 0, 0)\}$.

Απάντηση: Αν (a, b, c) είναι το ζητούμενο διάνυσμα, τότε

$$u = a(1, 1, 0) + b(2, 1, 1) + c(2, 0, 0) \Rightarrow (6, 3, 1) = (a + 2b + 2c, a + b, b) \Rightarrow \begin{cases} a + 2b + 2c = 6, \\ a + b = 3, \\ b = 1. \end{cases}$$

Λύνουμε το τελευταίο σύστημα και παίρνουμε ότι $(a, b, c) = (2, 1, 1)$.

Άσκηση 10.2 Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του πολωνύμου $p(x) = 3x^2 - 6x - 2$ ως προς την βάση $\mathcal{B} = \{x^2, x - 1, 2x\}$ του $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Απάντηση: Αν (a, b, c) είναι το ζητούμενο διάνυσμα, τότε

$$p(x) = a(x^2) + b(x - 1) + c(2x) \Rightarrow 3x^2 - 6x - 2 = ax^2 + (b + 2c)x - b \Rightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b + 2c = -6, \\ -b = -2. \end{cases}$$

Λύνουμε το τελευταίο σύστημα και παίρνουμε ότι $(a, b, c) = (3, 2, -4)$.

Άσκηση 10.3 Δείξτε ότι η απεικόνιση $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}, f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$ είναι ένας επιμορφισμός διανυσματικών χώρων.

Απάντηση: Καταρχάς θα πρέπει να δείξουμε ότι η L είναι καλά ορισμένη. Εδώ θα πρέπει να δείξουμε ότι πράγματι, για κάθε $f \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, έχουμε ότι $L(f) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$. Έστω λοιπόν $f = f_0 + f_1x + f_2x^2$, τότε

$$L(f) = f(x+1) - f(x) = f_0 + f_1(x+1) + f_2(x+1)^2 - (f_0 + f_1x + f_2x^2) = f_1 + f_2 + 2f_2x \in \mathbb{R}[x]_{\leq 1}.$$

Ακόμα, αν $f, g \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ και $k \in \mathbb{R}$, εύκολα βλέπουμε ότι

$$L(kf + g) = (kf + g)(x+1) - (kf + g)(x) = k(f(x+1) - f(x)) + (g(x+1) - g(x)) = kL(f) + L(g),$$

άρα L γραμμική. Τέλος, αν $g \in \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$, τότε $g = g_0 + g_1x$ για κάποια $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι $f = (g_0 - \frac{g_1}{2})x + \frac{g_1}{2}x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ και $L(f) = g$. Επομένως L επί και (επειδή είναι γραμμική) θα είναι και επιμορφισμός.

Άσκηση 10.4 Έστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Βρείτε ισομορφισμούς $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, V)$ και $g \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^2)$.

Υπόδειξη: Εύκολα βλέπουμε ότι $V = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Άρα αν πάρουμε ως βάση του V την $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$, τότε ένας ισομορφισμός $V \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι ο $i_{\mathcal{B}}$ και ένας ισομορφισμός $\mathbb{R}^2 \rightarrow V$ είναι ο $i_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Άσκηση 10.5 Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος ισομορφισμοί $f : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Απάντηση: Καταρχάς παρατηρούμε ότι $\dim \text{Mat}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = 4$, άρα οι δύο χώροι είναι ισόμορφοι. Επομένως υπάρχει κάποιος ισομορφισμός $f : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Ισχυριζόμαστε ότι όλες οι απεικονίσεις της μορφής $f_a : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, $A \mapsto af(A)$, όπου $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι ισομορφισμοί (και προφανώς άπειροι στο πλήθος).

Πράγματι, για κάθε $a \neq 0$, έχουμε ότι για $A, B \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ και $k \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$f_a(kA + B) = af(kA + B) \stackrel{f \text{ γραμμική}}{=} akf(A) + af(B) = kf_a(A) + f_a(B),$$

άρα f_a γραμμική. Ακόμα, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $g = \frac{1}{a}f^{-1}$ είναι η αντίστροφη της f_a , δηλαδή f_a αντιστρέψιμη, δηλαδή ισομορφισμός.

Άσκηση 10.6 Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και $L \in \mathcal{L}(V, W)$ τέτοια ώστε $\text{Im } L \cong \ker L$. Δείξτε ότι $\dim V$ άρτιος.

Απάντηση: Έστω $\dim \text{Im } L = k$. Επειδή $\text{Im } L \cong \ker L$, παίρνουμε ότι $\dim \ker L = \dim \text{Im } L = k$. Άρα παίρνουμε ότι

$$\dim V = \dim \text{Im } L + \dim \ker L = k + k = 2k,$$

δηλαδή $\dim V$ άρτιος.

Άσκηση 10.7 Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης n , και γραμμικές απεικονίσεις $L, M \in \mathcal{L}(V, V)$, με τάξεις r_L και r_M αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $L \circ M = 0$ και $L + M$ ισομορφισμός. Δείξτε ότι $r_L + r_M = n$.

Απάντηση: Έστω $u \in \text{Im } M$. Τότε έχουμε ότι υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $u = M(v)$. Επομένως

$$L(u) = L(M(v)) = (L \circ M)(v) = 0,$$

δηλαδή $u \in \ker L$. Δείξαμε ότι $\text{Im } M \subseteq \ker L \Rightarrow r_M \leq n - r_L \Rightarrow r_M + r_L \leq n$.

Έστω τώρα $u \in \ker M \cap \ker L$. Τότε έχουμε $M(u) = L(u) = 0 \Rightarrow (M + L)(u) = 0$. Όμως $M + L$ ισομορφισμός, άρα $\ker(M + L) = \{0\}$, δηλαδή $u = 0$. Με άλλα λόγια δείξαμε ότι $\ker M \cap \ker L = \{0\}$, άρα μπορούμε να μιλάμε για το ευθύ άθροισμα των δύο πυρήνων. Επειδή και οι δύο είναι υπόχωροι του V , θα έχουμε ότι

$$\ker M \oplus \ker L \subseteq V \Rightarrow \dim \ker M + \dim \ker L \leq \dim V \Rightarrow (n - r_M) + (n - r_L) \leq n,$$

δηλαδή $r_M + r_L \geq n$.

Συνολικά παίρνουμε ότι $r_M + r_L = n$.

Άσκηση 10.8 Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους U, V, W και γραμμικές απεικονίσεις $L \in \mathcal{L}(U, W)$, $M \in \mathcal{L}(U, V)$, τέτοιες ώστε $\ker M \subseteq \ker L$. Δείξτε ότι υπάρχει $N \in \mathcal{L}(V, W)$, τέτοια ώστε $L = N \circ M$.

Υπόδειξη: Έστω $\mathcal{B}_L$ μια βάση του $\ker L$. Επεκτείνουμε την $\mathcal{B}_L$ σε μια βάση $\mathcal{B}_U$ του U . Έτσι έχουμε ότι $\mathcal{B}_L \subseteq \mathcal{B}_U$.

Θεωρούμε το σύνολο $M(\mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_L) \subseteq V$ και παρατηρούμε ότι, επειδή $\ker M \subseteq \ker L$, το $M(\mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_L)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο (δείξτε το!). Επομένως μπορούμε να το επεκτείνουμε σε μια βάση $\mathcal{B}_V$ του V . Παίρνουμε ως N την γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $\nu : \mathcal{B}_V \rightarrow W$ που ορίζεται ως εξής:

$$\nu(b) = \begin{cases} L(u), & \text{αν } b = M(u) \text{ για κάποιο } u \in M(\mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_L), \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε για κάθε $x \in U$, έχουμε ότι υπάρχουν μοναδικά $\beta_\ell, \gamma_u \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$x = \sum_{\ell \in \mathcal{B}_L} \beta_\ell \ell + \sum_{u \in \mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_L} \gamma_u u.$$

Έτσι παίρνουμε ότι για κάθε $x \in U$,

$$\begin{aligned}
(N \circ M)(x) &= (N \circ M) \left(\sum_{\ell \in \mathcal{B}_L} \beta_\ell \ell + \sum_{u \in \mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_L} \gamma_u u \right) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{B}_L} \beta_\ell N(M(\ell)) + \sum_{u \in \mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_L} \gamma_u N(M(u)) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{B}_L} \beta_\ell \nu(M(\ell)) + \sum_{u \in \mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_L} \gamma_u \nu(M(u)) \\
&= \sum_{u \in \mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_L} \gamma_u L(u) \\
&= L \left(\sum_{u \in \mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_L} \gamma_u u \right) \\
&= L(x).
\end{aligned}$$