

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 9

Άσκηση 9.1 Δείξτε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πολλαπλασιασμός με ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ δηλαδή ότι υπάρχει κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $L(x) = ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Θέτουμε $L(1) = a$. Επειδή L γραμμική, έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$L(x) = L(x \cdot 1) = xL(1) = xa = ax.$$

Άσκηση 9.2 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές και (αν είναι) βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα τους.

- a. $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y) = (2x + 3y, x)$.
b. $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y) = (y, x + y + 1)$.

Απάντηση:

- a. Έστω $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ και $c \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L((cx_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= L(cx_1 + x_2, cy_1 + y_2) = (2(cx_1 + x_2) + 3(cy_1 + y_2), cx_1 + x_2) \\ &= c(2x_1 + 3y_1, x_1) + (2x_2 + 3y_2, x_2) = cL(x_1, y_1) + L(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Άρα η L είναι γραμμική.

Ακόμα,

$$(x, y) \in \ker L \iff L(x, y) = 0 \iff (2x + 3y, x) = 0 \iff \begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ x = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Άρα $\ker L = \{(0, 0)\}$. Επιπλέον, παίρνουμε ότι $\dim \operatorname{Im} L = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker L = 2 - 0 = 2$, και αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\operatorname{Im} L$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ και $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, μας δίνει ότι $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^2$.

- b. Παρατηρούμε ότι $L(0, 0) = (0, 1) \neq 0$, άρα η L δεν είναι γραμμική.

Άσκηση 9.3 Δείξτε ότι δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε

$$\ker L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4 = x_5\}.$$

Απάντηση: Έστω L μια τέτοια απεικόνιση. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\ker L = \langle (1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1) \rangle$$

επομένως $\dim \ker L = 2$. Ακόμα, έχουμε ότι $\operatorname{Im} L$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, άρα $\dim \operatorname{Im} L \leq 2$. Άρα

$$5 = \dim \mathbb{R}^5 = \dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L \leq 2 + 2 = 4,$$

άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια L .

Άσκηση 9.4 Έστω X διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και V ένας υπόχωρός του. Δείξτε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $L : V \rightarrow Y$, μπορεί να επεκταθεί σε γραμμική απεικόνιση $\tilde{L} : X \rightarrow Y$, δηλαδή υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\tilde{L}$ τέτοια ώστε $\tilde{L}(u) = L(u)$ για κάθε $u \in V$.

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι μια γραμμική απεικόνιση $\tilde{L} : X \rightarrow Y$ χαρακτηρίζεται πλήρως από την απεικόνιση των στοιχείων μιας βάσης του X . Έτσι, θεωρούμε μια βάση του V , $\{v_1, \dots, v_n\}$ και την επεκτείνουμε σε μια βάση του X $\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m\}$.

Κατασκευάζουμε την $\tilde{L}$ ως εξής: $\tilde{L}(v_i) = L(v_i)$, για $i = 1, \dots, n$ και $\tilde{L}(u_j) = y_j$, για $j = 1, \dots, m$, όπου τα y_j μπορούν να επιλεγθούν αυθαίρετα εντός του Y , και επεκτείνουμε σε ολόκληρο το X γραμμικά. Παρατηρήστε ότι η $\tilde{L}$ είναι γραμμική, και ταυτίζεται με την L στον υπόχωρο V .

Άσκηση 9.5 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z, t) = (x + y, y - z, x + z)$. Δείξτε ότι η L είναι γραμμική, βρείτε βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα της και υπολογίστε την τάξη της.

Απάντηση: Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^5$ και $c \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$L(cx + y) = cL(x) + L(y),$$

άρα L γραμμική. Ακόμα, έχουμε ότι $L(e_1) = (1, 0, 1)$, $L(e_2) = (1, 1, 0)$, $L(e_3) = (0, -1, 1)$ και $L(e_4) = (0, 0, 0)$, δηλαδή ο πίνακας στον οποίο αντιστοιχεί η απεικόνιση L είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, εύκολα ελέγχουμε με απαλοιφή Gauss ότι $\ker L = \mathcal{N}(A) = \langle (-1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$ και $\operatorname{Im} L = \mathcal{R}(A) = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$. Τέλος, η L έχει τάξη 2.

Άσκηση 9.6 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_5, x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5, -2x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5).$$

Βρείτε έναν πίνακα τέτοιο ώστε $L(x) = Ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^5$.

Απάντηση: Έστω $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^5$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L(e_1) &= (1, -2, 1, -2), \\ L(e_2) &= (0, 1, 0, 1), \\ L(e_3) &= (1, 0, 1, 0), \\ L(e_4) &= (0, 0, 1, 1), \\ L(e_5) &= (0, 1, 2, 3), \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 9.7 Έστω διανυσματικός χώρος V και δύο συμπληρωματικοί υπόχωροι του X και Y . Αν $v \in V$ και $v = x + y$, με $x \in X, y \in Y$, ορίζουμε την προβολή του V στον X παράλληλα στον Y ως $P : V \rightarrow V$ με $P(v) = x$. Δείξτε ότι η P είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση και ότι $P^2 = P$.

Απάντηση: Για να δείξουμε ότι η P είναι καλά ορισμένη, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $v \in V$ απεικονίζεται σε ένα μοναδικό $x \in X$. Το τελευταίο προκύπτει άμεσα αν δείξουμε ότι η γραφή $v = x + y$ με $x \in X$ και $y \in Y$ είναι μοναδική. Έστω λοιπόν $v = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ δύο τέτοιες γραφές, με $x_1, x_2 \in X$ και $y_1, y_2 \in Y$. Τότε παίρνουμε $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$. Όμως $x_1 - x_2 \in X$ και $y_2 - y_1 \in Y$, άρα $x_1 - x_2 \in X \cap Y = \{0\} \Rightarrow x_1 = x_2$. Ομοίως παίρνουμε ότι $y_1 = y_2$ και καταλήγουμε ότι η P είναι καλά ορισμένη.

Έστω τώρα $u, v \in V$ και $c \in \mathbb{R}$. Αν $u = x_u + y_u$ και $v = x_v + y_v$, με $x_u, x_v \in X$ και $y_u, y_v \in Y$, έχουμε ότι

$$P(cu + v) = P((cx_u + x_v) + (cy_u + y_v)) = cx_u + x_v = cP(u) + P(v),$$

άρα P γραμμική.

Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι $P(x) = x$, άρα, αν $u = x + y$, έχουμε ότι $P(u) = x$ και $P^2(u) = P(P(u)) = P(x) = x$. Άρα $P^2 = P$.

Άσκηση 9.8 Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και V_0 ένας υπόχωρός του. Να δείξετε ότι:

- Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow V$, με $\ker f = V_0$.
- Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : V \rightarrow V$, με $\operatorname{Im} g = V_0$.

Υπόδειξη: Έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ μια βάση του V_0 . Επεκτείνουμε την βάση αυτή σε μια βάση

$$\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m\}$$

του V . Εφόσον μια γραμμική απεικόνιση χαρακτηρίζεται πλήρως από την απεικόνιση των στοιχείων μιας βάσης, αρκεί να απεικονίσουμε κατάλληλα τα στοιχεία της παραπάνω βάσης για να κατασκευάσουμε την γραμμική απεικόνιση με τα χαρακτηριστικά που θέλουμε κάθε φορά.

- Έτσι αν $f(v_i) = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και, για $j = 1, \dots, m$, επιλέξουμε $f(u_j)$ τέτοια ώστε $f(u_1), \dots, f(u_m)$ γραμμικά ανεξάρτητα (π.χ. μπορούμε να επιλέξουμε $f(u_j) = u_j$), τότε εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\ker f = V_0$.
- Ομοίως, αν επιλέξουμε $f(v_i) = v_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και, για $j = 1, \dots, m$, επιλέξουμε $f(u_j) = 0$ εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\operatorname{Im} g = V_0$.

Άσκηση 9.9 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $f : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f^2 = f$. Να δείξετε ότι $V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Απάντηση: Έστω $u \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$. Επειδή $u \in \ker f$ έχουμε ότι $f(u) = 0$ και επειδή $u \in \operatorname{Im} f$ υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $f(v) = u$. Όμως έχουμε ότι

$$f(v) = u \Rightarrow f(f(v)) = f(u) \xrightarrow{f^2=f, f(u)=0} f(v) = 0 \xrightarrow{f(v)=u} u = 0,$$

δηλαδή $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, δηλαδή το άθροισμά τους είναι ευθύ. Ακόμα έχουμε ότι

$$\dim(\ker f \oplus \operatorname{Im} f) = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V,$$

το οποίο σε συνδυασμό ότι $\ker f \oplus \operatorname{Im} f$ υπόχωρος του V , μας δίνει ότι $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = V$.