

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 8

Άσκηση 8.1 Βρείτε την διάσταση και μια βάση για τους τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωρους του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 8.2 Βρείτε την διάσταση και μια βάση για τους τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωρους του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 8.3 Βρείτε πίνακα A τέτοιο ώστε το $(1, 1, 1) \in \mathcal{N}(A)$ και $(1, 1, 1) \in \mathcal{R}(A^T)$.

Άσκηση 8.4 Εάν η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μια μη μηδενική λύση, δείξτε ότι υπάρχει κάποιο w τέτοιο ώστε η εξίσωση $A^T y = w$ δεν έχει λύση.

Άσκηση 8.5 Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_5$ στο V , και διανύσματα $w = \sqrt{2}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + v_3 + 3v_4 - \sqrt{3}v_5$.

- Υπάρχουν δύο τριδιάστατοι υπόχωροι W_1 και W_2 του V , τέτοιοι ώστε $W_1 \cap W_2 = \langle w \rangle$;
- Υπάρχουν δύο δισδιάστατοι υπόχωροι U_1 και U_2 του V , οι οποίοι δεν περιέχουν το w , και είναι τέτοιοι ώστε $w \in U_1 + U_2$;

Άσκηση 8.6 Στον διανυσματικό χώρο $C^0([0, 1])$ των συνεχών συναρτήσεων $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, θεωρούμε τους υπόχωρους X των σταθερών συναρτήσεων και Y των συναρτήσεων g για τις οποίες $\int_0^1 g(t)dt = 0$. Δείξτε ότι X και Y είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του $C^0([0, 1])$, δηλαδή ότι $C^0([0, 1]) = X \oplus Y$.

Άσκηση 8.7 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ και τους υπόχωρους $A = \langle (1, 0, 2, -1), (-1, 1, 1, 1) \rangle$ και $B = \langle (-1, -3, 0, 1), (5, 0, 3, 0) \rangle$. Βρείτε την διάσταση $\dim A \cap B$.

Άσκηση 8.8

- Έστω A, B υπόχωροι του $\mathbb{R}^7$ τέτοιοι ώστε $\dim A = 4$ και $\dim B = 5$. Δείξτε ότι $\dim A \cap B \geq 2$.
- Να βρεθούν υπόχωροι A_0, B_0 του $\mathbb{R}^7$ τέτοιοι ώστε $\dim A_0 = 4$, $\dim B_0 = 5$ και $\dim A \cap B = 2$.

Άσκηση 8.9 Για κάθε $m \times n$ πίνακα A και $n \times k$ πίνακα B , να αποδείξετε ότι $\dim \mathcal{N}(AB) \geq \dim \mathcal{N}(B)$.

Άσκηση 8.10 Για κάθε $m \times n$ πίνακα A και $n \times k$ πίνακα B , να αποδείξετε ότι $r_{AB} \leq \min(r_A, r_B)$, όπου r_C είναι η τάξη του πίνακα C .