

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 8

Άσκηση 8.1 Βρείτε την διάσταση και μια βάση για τους τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωρους του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Ανατρέξετε στο κομμάτι της θεωρίας που ασχολείται με την εύρεση και τον χαρακτηρισμό των θεμελιωδών υπόχωρων ενός πίνακα. Η απαλοιφή Gauss μας δίνει ότι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU.$$

Από αυτήν την γραφή καταλαβαίνουμε ότι

- $\dim \mathcal{R}(A^T) = 3$ και $\mathcal{R}(A^T) = \langle (1, 1, 1, 2), (0, 1, 1, 1), (0, 0, -1, 0) \rangle$.
- $\dim \mathcal{R}(A) = 3$ και επειδή στον U οι τρεις πρώτες στήλες αντιστοιχούν σε οδηγούς, τότε $\mathcal{R}(A) = \langle (1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (1, 2, 2, -1) \rangle$.
- $\dim \mathcal{N}(A) = 1$ και για να βρούμε μια βάση του μηδενόχωρου, αρκεί να λύσουμε το $Ax = 0$. Επειδή L αντιστρέψιμος, αρκεί να λύσουμε την $Ux = 0$ που λύνεται εύκολα με ανάδρομη αντικατάσταση. Εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις του τελευταίου είναι της μορφής $(-x_4, -x_4, 0, x_4)$, $x_4 \in \mathbb{R}$. Επομένως $\mathcal{N}(A) = \langle (-1, -1, 0, 1) \rangle$.
- $\dim \mathcal{N}(A^T) = 1$ και παίρνουμε ότι ο $\mathcal{N}(A^T)$ παράγεται από την τελευταία γραμμή του L^{-1} . Έτσι εύκολα υπολογίζουμε

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $\mathcal{N}(A^T) = \langle (-1, 2, -1, 1) \rangle$.

Άσκηση 8.2 Βρείτε την διάσταση και μια βάση για τους τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωρους του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Ανατρέξετε στο κομμάτι της θεωρίας που ασχολείται με την εύρεση και τον χαρακτηρισμό των θεμελιωδών υπόχωρων ενός πίνακα. Η απαλοιφή Gauss μας δίνει ότι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU.$$

Από αυτήν την γραφή καταλαβαίνουμε ότι

- Έχουμε ότι $\mathcal{R}(A^T)$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ και $\dim \mathcal{R}(A^T) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Με άλλα λόγια $\mathcal{R}(A^T) = \mathbb{R}^4$.
- Ομοίως με πριν, παίρνουμε ότι $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^4$.
- Παρατηρούμε ότι $\dim \mathcal{N}(A) = 0$, επομένως $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0, 0)\}$.
- Παρατηρούμε ότι $\dim \mathcal{N}(A^T) = 0$, επομένως $\mathcal{N}(A^T) = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Άσκηση 8.3 Βρείτε πίνακα A τέτοιο ώστε το $(1, 1, 1) \in \mathcal{N}(A)$ και $(1, 1, 1) \in \mathcal{R}(A^T)$.

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^T) = \mathbb{R}^n$. Άρα $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T) = \{0\}$. Καταλήγουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας.

Άσκηση 8.4 Εάν η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μια μη μηδενική λύση, δείξτε ότι υπάρχει κάποιο w τέτοιο ώστε η εξίσωση $A^T y = w$ δεν έχει λύση.

Απάντηση: Έστω ότι $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ και έστω r η τάξη του A . Επειδή υπάρχει μη μηδενική λύση του $Ax = 0$, παίρνουμε ότι $\dim \mathcal{N}(A) > 0 \iff n - r > 0 \iff n > r$. Αυτό σημαίνει ότι $\dim \mathcal{R}(A^T) = r < n = \dim \mathbb{R}^n$. Άρα $\mathcal{R}(A^T) \subsetneq \mathbb{R}^n$ δηλαδή υπάρχει κάποιο διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{R}(A^T)$. Καταλήγουμε ότι το w δεν γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A^T και άρα το σύστημα $A^T y = w$ δεν έχει λύση.

Άσκηση 8.5 Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_5$ στο V , και διανύσματα $w = \sqrt{2}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + v_3 + 3v_4 - \sqrt{3}v_5$.

- Υπάρχουν δύο τρισδιάστατοι υπόχωροι W_1 και W_2 του V , τέτοιοι ώστε $W_1 \cap W_2 = \langle w \rangle$;
- Υπάρχουν δύο διςδιάστατοι υπόχωροι U_1 και U_2 του V , οι οποίοι δεν περιέχουν το w , και είναι τέτοιοι ώστε $w \in U_1 + U_2$;

Απάντηση:

- Παρατηρώ ότι αν $W_1 = \langle v_1, v_2, w \rangle$ και $W_2 = \langle v_3, v_4, w \rangle$, τότε οι τρισδιάστατοι χώροι W_1 και W_2 είναι τέτοιοι ώστε $W_1 \cap W_2 = \langle w \rangle$, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $v_1, \dots, v_5$.
- Παρατηρώ ότι αν $U_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ και $U_2 = \langle v_5, v_3 + 3v_4 \rangle$, τότε οι διςδιάστατοι χώροι U_1 και U_2 είναι τέτοιοι ώστε $w \notin U_1, w \notin U_2$ και $w \in U_1 + U_2$.

Άσκηση 8.6 Στον διανυσματικό χώρο $C^0([0, 1])$ των συνεχών συναρτήσεων $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, θεωρούμε τους υπόχωρους X των σταθερών συναρτήσεων και Y των συναρτήσεων g για τις οποίες $\int_0^1 g(t)dt = 0$. Δείξτε ότι X και Y είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του $C^0([0, 1])$, δηλαδή ότι $C^0([0, 1]) = X \oplus Y$.

Απάντηση: Αρκεί να δείξουμε δύο πράγματα: ότι $X \cap Y = \{0\}$ και ότι $X + Y = C^0([0, 1])$.

- Έστω $f \in X \cap Y$. Επειδή $f \in X$, έχουμε ότι $f(x) = c$ για κάποιο c . Επειδή $f \in Y$, έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 cdt = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Άρα $f = 0$ και $X \cap Y = \{0\}$.

- Έστω $f \in C^0([0, 1])$. Αν $c = \int_0^1 f(t)dt$, θέτουμε $g(x) = f(x) - c$ και $h(x) = c$. Εύκολα βλέπουμε ότι $f(x) = g(x) + h(x)$, ότι $h \in X$ και ότι

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 (f(t) - c)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 cdt = c - c = 0,$$

δηλαδή ότι $g \in Y$. Καταλήγουμε ότι $f \in X + Y$, άρα $C^0([0, 1]) \subseteq X + Y$. Επειδή $X, Y \subseteq C^0([0, 1])$ παίρνουμε άμεσα και τον αντίστροφο εγκλεισμό $X + Y \subseteq C^0([0, 1])$, δηλαδή έχουμε ότι $X + Y = C^0([0, 1])$.

Άσκηση 8.7 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ και τους υπόχωρους $A = \langle (1, 0, 2, -1), (-1, 1, 1, 1) \rangle$ και $B = \langle (-1, -3, 0, 1), (5, 0, 3, 0) \rangle$. Βρείτε την διάσταση $\dim A \cap B$.

Απάντηση: Εύκολα βλέπουμε ότι $\dim A = \dim B = 2$. Επίσης, παρατηρούμε ότι ο χώρος $A + B$ ισούται με τον χώρο γραμμών του πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Κάνοντας την απαλοιφή Gauss παίρνουμε τον αντίστοιχο κλιμακωτό

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Άρα $\dim \mathcal{R}(C^T) = \dim(A + B) = 4$. Καταλήγουμε ότι

$$\dim A \cap B = \dim A + \dim B - \dim(A + B) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Άσκηση 8.8

- Έστω A, B υπόχωροι του $\mathbb{R}^7$ τέτοιοι ώστε $\dim A = 4$ και $\dim B = 5$. Δείξτε ότι $\dim A \cap B \geq 2$.
- Να βρεθούν υπόχωροι A_0, B_0 του $\mathbb{R}^7$ τέτοιοι ώστε $\dim A_0 = 4, \dim B_0 = 5$ και $\dim A_0 \cap B_0 = 2$.

Απάντηση:

- Έχουμε ότι $A + B \subseteq \mathbb{R}^7$, δηλαδή $\dim(A + B) \leq \dim \mathbb{R}^7 = 7$. Έτσι έχουμε ότι

$$\dim A \cap B = \dim A + \dim B - \dim(A + B) \geq 5 + 4 - 7 = 2.$$

- Παίρνουμε μια βάση $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ του $\mathbb{R}^7$. Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε την συνήθη βάση με $e_i \in \mathbb{R}^7$ το διάνυσμα με όλες τις συντεταγμένες ίσες με μηδέν εκτός της i -στής που είναι ίση με 1. Τότε αν $A_0 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ και $B_0 = \langle e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$, εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\dim A_0 = 4, \dim B_0 = 5$ και $\dim A_0 \cap B_0 = 2$.

Άσκηση 8.9 Για κάθε $m \times n$ πίνακα A και $n \times k$ πίνακα B , να αποδείξετε ότι $\dim \mathcal{N}(AB) \geq \dim \mathcal{N}(B)$.

Απάντηση: Καταρχάς παρατηρούμε ότι $\mathcal{N}(AB), \mathcal{N}(B) \subseteq \mathbb{R}^k$. Έστω $x \in \mathcal{N}(B)$. Τότε έχουμε ότι

$$Bx = 0 \Rightarrow (AB)x = A(Bx) = A \cdot 0 = 0,$$

δηλαδή $x \in \mathcal{N}(AB)$ και $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(AB)$. Εφόσον πρόκειται για υπόχωρους του ίδιου χώρου, το ζητούμενο έπεται.

Άσκηση 8.10 Για κάθε $m \times n$ πίνακα A και $n \times k$ πίνακα B , να αποδείξετε ότι $r_{AB} \leq \min(r_A, r_B)$, όπου r_C είναι η τάξη του πίνακα C .

Απάντηση: Από την προηγούμενη άσκηση παίρνουμε ότι

$$\dim \mathcal{N}(AB) \geq \dim \mathcal{N}(B) \iff k - r_{AB} \geq k - r_B \iff r_{AB} \leq r_B.$$

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη άσκηση για τους ανάστροφους πίνακες A^T και B^T , παίρνουμε ότι

$$\dim \mathcal{N}(B^T A^T) \geq \dim \mathcal{N}(A^T) \iff m - r_{B^T A^T} \geq m - r_{A^T} \iff r_{B^T A^T} \leq r_{A^T} \iff r_{AB} \leq r_A.$$

Συνολικά έχουμε ότι $r_{AB} \leq \min(r_A, r_B)$.