

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 7

Άσκηση 7.1 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές.

- Το σύνολο $\{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ παράγει τον $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο $\{(1, 1, -1), (-2, 1, 1), (-2, 7, -1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο $\{(1, 1, -1), (-2, 1, 1), (-2, 7, -1)\}$ παράγει ένα υπόχωρο διάστασης 2.

Άσκηση 7.2 Βρείτε μία βάση του μηδενόχωρου και μία βάση του χώρου στηλών του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 7.3 Βρείτε μία βάση του χώρου $\langle (1, 0, 1, -1), (-2, 1, -1, 0), (1, 1, 2, -3), (0, 2, 2, -4) \rangle$.

Άσκηση 7.4 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.

- Υπάρχει πίνακας $A \in \text{Mat}_{3 \times 5}(\mathbb{R})$ του οποίου ο μηδενόχωρος έχει διάσταση 2 και ο χώρος στηλών παράγεται από 2 διανύσματα.
- Για κάθε πίνακα $A \in \text{Mat}_{3 \times 5}(\mathbb{R})$, εάν $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^3$, τότε $\dim \mathcal{N}(A) = 2$.
- Υπάρχει τετραγωνικός πίνακας $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$.
- Υπάρχει γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων, $\{v_1, \dots, v_n\}$, του $\mathbb{R}^n$ και διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε το σύνολο $\{v_1, \dots, v_n, u\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
- Αν το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m, u\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$, τότε $n = m$ και το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^m$.

Άσκηση 7.5 Βρείτε δύο βάσεις του μηδενόχωρου του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 7.6 Δείξτε ότι το σύνολο $\{1+x, -x+x^3\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και συμπληρώστε το σε βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Άσκηση 7.7 Έστω V διανυσματικός χώρος και $\{v_1, v_2, v_3\}$ μία βάση του. Δείξτε ότι το σύνολο των ζευγών $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, των παραμέτρων a, b για τις οποίες το σύνολο $\{v_1 + v_3, -v_2 + 2v_3, v_1 + av_2 + bv_3\}$ δεν είναι βάση του V , είναι μία ευθεία στον $\mathbb{R}^2$, την οποία να προσδιορίσετε.