

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 7

Άσκηση 7.1 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές.

- Το σύνολο $\{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ παράγει τον $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο $\{(1, 1, -1), (-2, 1, 1), (-2, 7, -1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.
- Το σύνολο $\{(1, 1, -1), (-2, 1, 1), (-2, 7, -1)\}$ παράγει ένα υπόχωρο διάστασης 2.

Απάντηση:

- Το σύνολο περιέχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα και ο χώρος $\mathbb{R}^3$ έχει διάσταση 3, άρα είναι βάση του.
- Το σύνολο περιέχει 4 διανύσματα ενός χώρου διάστασης 3, επομένως είναι γραμμικώς εξαρτημένο και άρα δεν είναι βάση του.
- Το σύνολο παράγει το χώρο $\mathbb{R}^3$. Μπορούμε να το δούμε ως εξής: παίρνουμε τον πίνακα με στήλες τα διανύσματα του συνόλου και βρίσκουμε μία βάση του χώρου στηλών.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Καταλήγουμε σε κλιμακωτό πίνακα με 3 οδηγούς, άρα $\dim(\mathcal{R}(A)) = 3$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από την εξής πρόταση:

Πρόταση 0.1 Έστω U υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V . Αν $\dim(U) = \dim(V) \in \mathbb{N}$ τότε $U = V$.

Απόδειξη: Έστω $\{u_1, \dots, u_n\}$ και $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάσεις των χώρων U και V αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι $U \neq V$. Τότε υπάρχει διάνυσμα $w \in V \setminus U$. Όμως τότε το σύνολο $\{u_1, \dots, u_n, w\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V . Αυτό είναι άτοπο, αφού ο χώρος έχει διάσταση n .

- Έστω A ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $(1, 1, -1), (-2, 1, 1), (-2, 7, -1)$. Θα υπολογίσουμε τη διάσταση του χώρου $\mathcal{R}(A)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι ο πίνακας A έχει τάξη 2, άρα $\dim \mathcal{R}(A) = 2$. Άρα το σύνολο $\{(1, 1, -1), (-2, 1, 1), (-2, 7, -1)\}$ δεν είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

ε. Όπως δείξαμε, το σύνολο $\{(1, 1, -1), (-2, 1, 1), (-2, 7, -1)\}$ παράγει ένα υπόχωρο διάστασης 2.

Άσκηση 7.2 Βρείτε μία βάση του μηδενόχωρου και μία βάση του χώρου στηλών του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Κάνουμε απαλοιφή Gauss στον πίνακα A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι οι οδηγοί είναι στις στήλες 1,2,3 του κλιμακωτού πίνακα, άρα οι στήλες 1,2,3 αρχικού πίνακα αποτελούν βάση του $\mathcal{R}(A)$. Δηλαδή μία βάση του $\mathcal{R}(A)$ είναι η $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, -1, 2)\}$.

Συνεχίζουμε με ανάδρομη αντικατάσταση και βρίσκουμε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος $Ax = 0$ είναι το $\{w(0, -2, -1, 1) : w \in \mathbb{R}\} = \langle (0, -2, -1, 1) \rangle$. Άρα μία βάση του $\mathcal{N}(A)$ είναι η $\{(0, -2, -1, 1)\}$.

Άσκηση 7.3 Βρείτε μία βάση του χώρου $\langle (1, 0, 1, -1), (-2, 1, -1, 0), (1, 1, 2, -3), (0, 2, 2, -4) \rangle$.

Απάντηση: Ας ονομάσουμε $V = \langle v_1 = (1, 0, 1, -1), v_2 = (-2, 1, -1, 0), v_3 = (1, 1, 2, -3), v_4 = (0, 2, 2, -4) \rangle$. Αν ορίσουμε $A \in \text{Mat}_4(\mathbb{R})$ να είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4 , τότε $\mathcal{R}(A) = V$. Τότε γνωρίζουμε πώς να υπολογίσουμε μία βάση του $\mathcal{R}(A)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Στον κλιμακωτό πίνακα οι οδηγοί είναι στις στήλες 1 και 2. Άρα οι στήλες 1 και 2 του αρχικού πίνακα είναι βάση του $\mathcal{R}(A)$. Δηλαδή μία βάση του V είναι η $\{v_1, v_2\}$.

Άσκηση 7.4 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.

- Υπάρχει πίνακας $A \in \text{Mat}_{3 \times 5}(\mathbb{R})$ του οποίου ο μηδενόχωρος έχει διάσταση 2 και ο χώρος στηλών παράγεται από 2 διανύσματα.
- Για κάθε πίνακα $A \in \text{Mat}_{3 \times 5}(\mathbb{R})$, εάν $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^3$, τότε $\dim \mathcal{N}(A) = 2$.
- Υπάρχει τετραγωνικός πίνακας $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$.
- Υπάρχει γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων, $\{v_1, \dots, v_n\}$, του $\mathbb{R}^n$ και διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε το σύνολο $\{v_1, \dots, v_n, u\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
- Αν το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m, u\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$, τότε $n = m$ και το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^m$.

Απάντηση:

- Έστω r η τάξη του πίνακα A . Τότε $\dim(\mathcal{N}(A)) = 5 - r$ και $\dim(\mathcal{R}(A)) = r$. Έαν υποθέσουμε ότι $\dim(\mathcal{N}(A)) = 2$, τότε $r = 3$. Αν ο χώρος στηλών παραγόταν από 2 διανύσματα τότε θα είχε διάσταση ≤ 2 . Δηλαδή θα είχαμε $r \leq 2$. Το οποίο δεν ισχύει.

- b. Αφού $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^3$, σημαίνει ότι $\dim(\mathcal{R}(A)) = 3$. Άρα $\dim(\mathcal{N}(A)) = 5 - \dim(\mathcal{R}(A)) = 2$.
- c. Αφού $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$, σημαίνει ότι $\dim(\mathcal{R}(A)) = n$. Άρα $\dim(\mathcal{N}(A)) = n - \dim(\mathcal{R}(A)) = 0$. Άρα $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.
- d. Εάν υπήρχαν τέτοια διανύσματα $v_1, \dots, v_n, u \in \mathbb{R}^n$, τότε θα είχαμε ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο με $n + 1$ στοιχεία σε ένα χώρο διάστασης n . Αυτό είναι αδύνατο.
- e. Το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m, u\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, άρα υπάρχουν $x, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, όχι όλα ίσα με 0, τέτοια ώστε $xu + \sum_{i=1}^m x_i v_i = 0$. Εάν ήταν $x = 0$, τότε θα είχαμε $\sum_{i=1}^m x_i v_i = 0$ και κάποιος από τους x_i είναι διάφορος του 0. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Αυτό είναι άτοπο. Άρα $x \neq 0$ και $u = -\sum_{i=1}^m \frac{x_i}{x} v_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Αυτό ισχύει για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$, άρα $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \mathbb{R}^n$. Βλέπουμε ότι το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και παράγει το χώρο $\mathbb{R}^n$, άρα είναι βάση του. Επομένως, $m = n$.

Άσκηση 7.5 Βρείτε δύο βάσεις του μηδενόχωρου του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Λύνουμε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Με ανάδρομη αντικατάσταση βρίσκουμε

$$\mathcal{N}(A) = \{z(2, -1, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\} = \langle (2, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1) \rangle.$$

Μία βάση του χώρου είναι η $\{v = (2, -1, 1, 0), u = (-1, -1, 0, 1)\}$. Μια οποιαδήποτε άλλη βάση του $\mathcal{N}(A)$ θα αποτελείται από δύο διανύσματα του $\mathcal{N}(A)$, δηλαδή θα είναι της μορφής $\{av + cu, bv + du\}$ για κάποια $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Εάν επιλέξουμε τα a, b, c, d έτσι ώστε το σύνολο $\{av + cu, bv + du\}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε θα είναι βάση του $\mathcal{N}(A)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda(av + cu) + \mu(bv + du) = 0 &\Leftrightarrow (a\lambda + b\mu)v + (c\lambda + d\mu)u = 0 \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} a\lambda + b\mu = 0 \\ c\lambda + d\mu = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι το τελευταίο σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση αν και μόνο αν ο πίνακας έχει τάξη 2 (ισοδύναμα αν είναι αντιστρέψιμος). Ένας τέτοιος πίνακας είναι για παράδειγμα ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, μία δεύτερη βάση του $\mathcal{N}(A)$ είναι η $\{v, v + u\}$.

Άσκηση 7.6 Δείξτε ότι το σύνολο $\{1+x, -x+x^3\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και συμπληρώστε το σε βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Απάντηση: Αρχικά θα δείξουμε ότι το σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Έστω

$$a(1+x) + b(-x+x^3) = 0 \Rightarrow a \cdot 1 + (a-b) \cdot x + b \cdot x^3 = 0$$

Το $\{1, x, x^2, x^3\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, άρα η τελευταία σχέση συνεπάγεται $a = a - b = b = 0$.

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Αντίκατάστασης. Το σύνολο $\{1, x, x^2, x^3\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. $1 + x = 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$, άρα μπορώ να αντικαταστήσω ένα από τα $1, x$ με το $1 + x$. Αντικαθιστώ το x και έχω ότι το σύνολο $\{1, 1 + x, x^2, x^3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Συνεχίζω: $-x + x^3 = 1 - (1 + x) + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$. Μπορώ να αντικαταστήσω ένα από τα $1, x^3$ με το $-x + x^3$. Έτσι, για παράδειγμα, παίρνω ότι το σύνολο $\{1, 1 + x, x^2, -x + x^3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Άσκηση 7.7 Έστω V διανυσματικός χώρος και $\{v_1, v_2, v_3\}$ μία βάση του. Δείξτε ότι το σύνολο των ζευγών $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, των παραμέτρων a, b για τις οποίες το σύνολο $\{v_1 + v_3, -v_2 + 2v_3, v_1 + av_2 + bv_3\}$ δεν είναι βάση του V , είναι μία ευθεία στον $\mathbb{R}^2$, την οποία να προσδιορίσετε.

Απάντηση: Ο χώρος V έχει βάση με 3 στοιχεία, άρα έχει διάσταση 3. Το σύνολο $\{v_1 + v_3, -v_2 + 2v_3, v_1 + av_2 + bv_3\}$ έχει 3 στοιχεία και συνεπώς είναι βάση του V αν και μόνο αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (ή ισοδύναμα αν και μόνο αν παράγει τον V). Εξετάζουμε πότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

$$\begin{aligned} x(v_1 + v_3) + y(-v_2 + 2v_3) + z(v_1 + av_2 + bv_3) &= 0 \Leftrightarrow \\ (x + z)v_1 + (-y + az)v_2 + (x + 2y + bz)v_3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ -y + az = 0 \\ x + 2y + bz = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η τελευταία ισοδυναμία ισχύει γιατί το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι βάση του V και άρα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο.

Κάνουμε απαλοιφή Gauss στον πίνακα του συστήματος:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a \\ 1 & 2 & b \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 2a + b - 1 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι το σύστημα έχει μη μηδενικές λύσεις (που όπως είδαμε είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύνολο να μην είναι βάση) αν και μόνο αν $2a + b - 1 = 0$. Άρα το σύνολο $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 2a + b - 1 = 0\}$ είναι ακριβώς το σύνολο των παραμέτρων για τις οποίες το σύνολο δεν είναι βάση. Βλέπουμε ότι είναι μία ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ με εξίσωση $2x + y - 1 = 0$.