

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Άσκηση 6.1 Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα, εξετάστε εάν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Εάν δεν είναι, δώστε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης.

- a. $\{(1, -1, 0), (-1, 1, 1), (1, -1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
- b. $\{(1, -1, 0), (-1, 1, 1), (1, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
- c. $\{1 + x, x + x^2, 1 + x + x^2\} \subseteq \mathbb{R}[x]$,
- d. $\{\sin, \cos\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Απάντηση: Θα εξετάσουμε τα δύο τελευταία σύνολα. Για το σύνολο $\{1 + x, x + x^2, 1 + x + x^2\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot (1 + x) + b \cdot (x + x^2) + c \cdot (1 + x + x^2) &= 0 \Leftrightarrow \\ (a + c) \cdot 1 + (a + b + c) \cdot x + (b + c) \cdot x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Το σύνολο $\{1, x, x^2\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}[x]$, οπότε η τελευταία σχέση συνεπάγεται

$$\left\{ \begin{array}{l} a + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση τη μηδενική, $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Άρα το αρχικό σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Για το υποσύνολο $\{\sin, \cos\}$ του χώρου $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ας πάρουμε ένα γραμμικό συνδυασμό που είναι ίσος με τη μηδενική συνάρτηση

$$a \cdot \sin + b \cdot \cos = 0.$$

Τότε $a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$ παίρνουμε $b = 0$. Για $x = \pi/2$ παίρνουμε $a = 0$. Άρα το αρχικό σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Άσκηση 6.2 Βρείτε ένα πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος, $\mathcal{N}(A)$, να περιέχει τα διανύσματα $(-1, 2, 1, 0)$ και $(1, -1, 0, 1)$ και ο χώρος στηλών του, $\mathcal{R}(A)$, να περιέχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Απάντηση: Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, τότε $\mathcal{N}(A) \leq \mathbb{R}^n$. Άρα $n = 4$. Εάν (x, y, z, w) είναι μία (οποιαδήποτε) γραμμή του A , τότε η συνθήκη της εκφώνησης είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 2y + z = 0 \\ x - y + w = 0 \end{array} \right\}.$$

Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι $\{z(-1, -1, 1, 0) + w(-2, -1, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\}$. Παρατηρήστε ότι οι γραμμές κάθε πίνακα που ικανοποιεί τις υποθέσεις είναι διανύσματα του συνόλου αυτού. Ας πάρουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι $(-1, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1) \in \mathcal{N}(A)$ και οι δύο τελευταίες στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Άσκηση 6.3 Δίνονται τα διανύσματα $x = (2, 3, 5), y = (1, 1, 2)$ και $v = (a, b, c)$. Βρείτε μια αναγκαία συνθήκη στα a, b, c ώστε να είναι το σύνολο $\{x, y, v\}$ γραμμικά εξαρτημένο. Κατόπιν βρείτε ένα διάνυσμα z ώστε το σύνολο $\{x, y, z\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απάντηση: Το σύνολο $\{x, y, u\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ, μ , όχι όλοι ίσοι με 0, τέτοιοι ώστε

$$\kappa x + \lambda y + \mu v = 0.$$

Ισόδύναμα, εάν και μόνο εάν το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 1 & b \\ 5 & 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

έχει μη μηδενικές λύσεις. Κάνουμε απαλοιφή Gauss στον πίνακα του συστήματος και καταλήγουμε στον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -\frac{1}{2} & b - \frac{3a}{2} \\ 0 & 0 & c - b - a \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν $c - b - a = 0$. Ένα διάνυσμα z , τέτοιο ώστε το σύνολο $\{x, y, z\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο θα πρέπει να μην ικανοποιεί τη συνθήκη αυτή. Για παράδειγμα, το διάνυσμα $(1, 0, 0)$.

Άσκηση 6.4 Δείξτε ότι αν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απάντηση: Θα εξετάσουμε πότε ένας γραμμικός συνδυασμός των $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ είναι ίσος με 0.

$$\begin{aligned} a(v_1 + v_2) + b(v_2 + v_3) + c(v_3 + v_1) &= 0 \Rightarrow \\ (a + c)v_1 + (a + b)v_2 + (b + c)v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, οπότε η τελευταία σχέση συνεπάγεται

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}.$$

Το τελευταίο σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Άρα το αρχικό σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Άσκηση 6.5 Δείξτε ότι $\langle (1, -1, 0), (-1, 1, 1) \rangle = \langle (-1, 1, 3), (0, 0, 1) \rangle$.

Απάντηση: θα δείξουμε ότι $\{(1, -1, 0), (-1, 1, 1)\} \subseteq \langle (-1, 1, 3), (0, 0, 1) \rangle$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\langle (1, -1, 0), (-1, 1, 1) \rangle \subseteq \langle (-1, 1, 3), (0, 0, 1) \rangle.$$

Παρόμοια θα δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό και θα έχουμε την ισότητα. Βλέπουμε ότι $(1, -1, 0) \in \langle (-1, 1, 3), (0, 0, 1) \rangle$ αν και μόνο το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

έχει λύση. Αντίστοιχα, $(-1, 1, 1) \in \langle (-1, 1, 3), (0, 0, 1) \rangle$ αν και μόνο αν το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

έχει λύση. Τα δύο συστήματα έχουν τον ίδιο πίνακα, οπότε μπορούμε να τα λύσουμε “συγχρόνως”:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Από τον τελευταίο κλιμακωτό πίνακα φαίνεται ότι και τα δύο συστήματα έχουν λύση. Άρα $\{(1, -1, 0), (-1, 1, 1)\} \subseteq \langle (-1, 1, 3), (0, 0, 1) \rangle$. Παρόμοια δείχνουμε ότι $\{(-1, 1, 3), (0, 0, 1)\} \subseteq \langle (1, -1, 0), (-1, 1, 1) \rangle$.

Άσκηση 6.6 Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Εάν $m < n$, δείξτε ότι οποιαδήποτε n διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απάντηση: Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Αντικατάστασης. Εάν θέλουμε να το δείξουμε χωρίς τη χρήση αυτού του θεωρήματος, τότε πρέπει να δείξουμε ότι για δεδομένα $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, όχι όλοι ίσοι με μηδέν, τέτοιοι ώστε $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$. Ισοδύναμα, θέλουμε να δείξουμε ότι το σύστημα $Ax = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις, όπου $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$. Μετά την απαλοιφή Gauss καταλήγουμε σε ένα κλιμακωτό πίνακα $U \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ο οποίος έχει περισσότερες στήλες από γραμμές. Άρα θα υπάρχουν $n - r$ ελεύθερες μεταβλητές, όπου r είναι το πλήθος των οδηγιών. Παρατηρήστε ότι $n - r > 0$, αφού $r \leq m < n$. Άρα το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις. Μάλιστα γνωρίζουμε ότι ο χώρος λύσεων, $\mathcal{N}(A)$, παράγεται από $n - r$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Άσκηση 6.7 Δείξτε ότι ο πίνακας $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν έχει τάξη n .

Απάντηση: Η απαλοιγή Gauss στον πίνακα A θα οδηγήσει σε ένα άνω τριγωνικό πίνακα U και στην παραγοντοποίηση $PA = LU$, στην οποία οι πίνακες P, L είναι αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Βλέπουμε τώρα, ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο U είναι αντιστρέψιμος. Όμως ο U είναι άνω τριγωνικός και είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι $\neq 0$. Δηλαδή αν και μόνο αν έχουμε n οδηγούς. Με άλλα λόγια, αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει τάξη n .

Άσκηση 6.8 Έστω $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αν και μόνο αν ο πίνακας $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ με στήλες τα $v_1, \dots, v_n$ είναι αντιστρέψιμος.

Απάντηση: Έστω U ο άνω τριγωνικός πίνακας στον οποίο καταλήγουμε μετά την απαλοιφή Gauss στον πίνακα A . Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αν και μόνο αν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή $\mathcal{N}(A) = \{0\}$. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν ο πίνακας U έχει n οδηγούς. Δηλαδή αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει τάξη n . Από την προηγούμενη άσκηση αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

Σημείωση: Επίσης, το σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αν και μόνο ο πίνακας με γραμμές τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ είναι αντιστρέψιμος. Πώς μπορεί να το δείξει κανείς αυτό;