

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Άσκηση 5.1 Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του αντίστοιχου διανυσματικού χώρου.

- a. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\}$,
- b. $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
- c. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$,
- d. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0\}$,
- e. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$,
- f. $\{x(1, 2^2, 0) + y(1, 2, 3) : x, y \in \mathbb{R}\}$,
- g. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$,
- h. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$.

Απάντηση: Υπόχωροι είναι τα σύνολα a, e, f, g. Μπορεί να το δείξει κανείς με το κριτήριο του υπόχωρου. Στο b περιέχονται τα $(1, 0)$, $(1, 1)$ αλλά δεν περιέχεται το $(1, 0) + (1, 1)$. Στο c περιέχεται το $(1, 1)$, αλλά όχι το $2 \cdot (1, 1)$. Στο d περιέχεται το $(1, 1, 1)$, αλλά όχι το $-(1, 1, 1)$. Στο h περιέχονται τα $(1, 1)$, $(1, -1)$, αλλά δεν περιέχεται το $(1, 1) + (1, -1)$.

Άσκηση 5.2 Έστω V διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$. Δείξτε ότι ο U είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν $U = \langle U \rangle$.

Απάντηση: Ας υποθέσουμε ότι ο U είναι υπόχωρος του V . Το τυχόν στοιχείο του $\langle U \rangle$ είναι της μορφής $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$, με $u_i \in U$. Καθώς ο U είναι υπόχωρος του V , είναι κλειστός ως προς τις πράξεις, οπότε $v \in U$. Άρα $\langle U \rangle \subseteq U$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός, $U \subseteq \langle U \rangle$, ισχύει για κάθε υποσύνολο του V . Οπότε $U = \langle U \rangle$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $U = \langle U \rangle$. Τότε ο U είναι υπόχωρος του V (αφού είναι ίσος με τον $\langle U \rangle$, ο οποίος γνωρίζουμε ότι είναι υπόχωρος).

Άσκηση 5.3 Εξετάστε ποιά από τα διανύσματα $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, 1, -1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$ ανήκουν στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ που παράγουν τα διανύσματα $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1, 1)$. Για όποιο διάνυσμα ανήκει, γράψτε το ως γραμμικό συνδυασμό των v_1, v_2, v_3 .

Απάντηση: Για κάθε ένα από τα διανύσματα $w_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_2 = (1, -1, 1, -1)$, $w_3 = (0, 1, 0, 1)$, $w_4 = (1, 0, 1, 0)$ πρέπει να ελέγξω εάν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x, y, z τέτοιοι ώστε

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = w_i$$

Ισοδύναμα θέλω να ελέγξω εάν καθένα από τα παρακάτω συστήματα έχει λύση

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = w_i$$

Μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή Gauss, λύνοντας και τα τρία συστήματα συγχρόνως (αφού και τα τρία έχουν τον ίδιο πίνακα).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι ο κλιμακωτός πίνακας στον οποίο καταλήγουμε, έχει μία μηδενική γραμμή. Μόνο ένα από τα τέσσερα συστήματα έχει 0 στο δεξί μέλος, οπότε μόνο αυτό το σύστημα έχει λύση (τα υπόλοιπα είναι αδύνατα). Άρα μόνο το διάνυσμα $(1, 0, 1, 0)$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Άσκηση 5.4 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Εξετάστε εάν το διάνυσμα $(1, -2, -1)$ ανήκει στο χώρο, $\mathcal{R}(A)$, που παράγουν οι στήλες του A . Βρείτε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ το οποίο δεν ανήκει στο χώρο στηλών του A .

Απάντηση: Γενικά, το διάνυσμα (a, b, c) ανήκει στο χώρο $\mathcal{R}(A)$ αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4 τέτοιοι ώστε

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Λύνουμε το σύστημα με απαλοιφή Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 1 & -2 & b \\ -2 & -5 & -1 & -1 & c \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a+b+c \end{array} \right)$$

Βλέπουμε ότι το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν $3a + b + c = 0$. Ειδικότερα, το διάνυσμα $(1, -2, -1)$ ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη και άρα ανήκει στον $\mathcal{R}(A)$. Το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ δεν την ικανοποιεί και άρα δεν ανήκει.

Άσκηση 5.5 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ τα οποία παράγουν το χώρο, $\mathcal{N}(A)$, των λύσεων του συστήματος $Ax = 0$.

Απάντηση: Λύνουμε το σύστημα $Ax = 0$ με απαλοιφή Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι x_3, x_4 . Κάνουμε ανάδρομη αντικατάσταση

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} \{(2x_3 - 3x_4, -x_3 + x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} &= \{x_3(2, -1, 1, 0) + x_4(-3, 1, 0, 1) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (2, -1, 1, 0), (-3, 1, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Άσκηση 5.6 Έστω $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, -1), v_3 = (3, 1, 1)$. Δείξτε ότι $(a, b, c) \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ αν και μόνο αν $b = c$. Γράψτε το διάνυσμα $(1, 3, 3)$ με δύο τρόπους ως γραμμικό συνδυασμό των v_1, v_2, v_3 .

Απάντηση: Το διάνυσμα (a, b, c) ανήκει στον υπόχωρο $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2, x_3 τέτοιοι ώστε $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = (a, b, c)$. Ισοδύναμα, αν το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

έχει λύση. Λύνουμε το σύστημα με απαλοιφή Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & -2 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b \end{array} \right)$$

Ο κλιμακωτός πίνακας έχει μία μηδενική γραμμή. Το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν το δεξί μέλος είναι ίσο με 0, δηλαδή αν και μόνο αν $b = c$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{cases} x_1 = a - x_2 - 3x_3 \\ -2x_2 = b - a + 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a+b}{2} - 2x_3 \\ x_2 = \frac{a-b}{2} - x_3 \end{cases}$$

Ειδικότερα, για το διάνυσμα $(a, b, c) = (1, 3, 3)$, οι λύσεις του συστήματος είναι οι

$$\{(2 - 2x_3, -1 - x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(2, -1, 0) + x_3(-2, -1, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Δύο λύσεις του συστήματος είναι οι $(2, -1, 0)$ και $(0, -2, 1)$ που μας δίνουν και τους αντίστοιχους γραμμικούς συνδυασμούς

$$(1, 3, 3) = 2v_1 - v_2 = -2v_2 + v_3$$

Άσκηση 5.7 Δείξτε ότι δεν υπάρχουν διανύσματα $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^3$. Γενικεύστε το επιχείρημα σας για διανύσματα $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

Απάντηση: Θα δείξουμε την πρόταση για το τυχόν $n \geq 2$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν διανύσματα $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \mathbb{R}^n$. Τότε κάθε διάνυσμα $b = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_{n-1}$, δηλαδή υπάρχουν $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$x_1v_1 + \cdots + x_{n-1}v_{n-1} = b$$

Ισοδύναμα το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση, όπου $A \in \text{Mat}_{n \times (n-1)}(\mathbb{R})$ είναι ο πίνακας που έχει για στήλες τα διανύσματα $v_1, \dots, v_{n-1}$. Η απαλοιφή Gauss στον πίνακα A θα οδηγήσει σε ένα κλιμακωτό πίνακα U με n γραμμές και $n - 1$ στήλες. Καθώς ο πίνακας μπορεί να έχει το πολύ $n - 1$ οδηγούς και κάθε μη μηδενική γραμμή έχει οδηγό, ο πίνακας U θα έχει τουλάχιστον μία μηδενική γραμμή. Στο δεξιό μέλος αυτής της γραμμής θα έχουμε ένα γραμμικό συνδυασμό των $a_1, \dots, a_n$, ας πούμε τον $\sum_{i=1}^n c_i a_i$, με $c_i \in \mathbb{R}$, για $1 \leq i \leq n$. Παρατηρήστε ότι τα c_i εξαρτώνται αποκλειστικά από τον πίνακα A , όχι από το διάνυσμα $b = (a_1, \dots, a_n)$ και δεν είναι όλα ίσα με 0.

[Ένας τρόπος για το δει κανείς αυτό είναι από την ανάλυση LU. Εάν $PA = LU$, τότε

$$Ax = b \Leftrightarrow P^{-1}LUx = b \Leftrightarrow Ux = L^{-1}Pb$$

Οι λύσεις του αρχικού συστήματος $Ax = b$ είναι ακριβώς αυτές του συστήματος $Ux = L^{-1}Pb$. Εάν η n γραμμή του πίνακα U είναι μηδενική, το δεξί μέλος είναι ίσο με $\sum_{i=1}^n c_i a_i$, όπου $b = (a_1, \dots, a_n)$ και $(c_1, \dots, c_n)$ είναι η τελευταία γραμμή του $L^{-1}P$. Ο τελευταίος πίνακας είναι αντιστρέψιμος, οπότε δε μπορεί να έχει μηδενική γραμμή.]

Η μηδενική γραμμή του U έχει $\sum_{i=1}^n c_i a_i$ στο δεύτερο μέλος και κάποιο c_i , ας πούμε το $c_{i_0} \neq 0$. Πάρτε τότε $b = e_{i_0}$ και δείτε ότι το δεύτερο μέλος της μηδενικής γραμμής είναι ίσο με $c_{i_0} \neq 0$. Άρα $e_{i_0} \notin \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$.

Άσκηση 5.8 Έστω $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $B \in \text{Mat}_{n \times p}(\mathbb{R})$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}(A)$ το χώρο λύσεων του συστήματος $Ax = 0$ και με $\mathcal{R}(B)$ το χώρο που παράγουν οι στήλες του B .

a. Δείξτε ότι

$$AB = O \iff \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{N}(A).$$

b. Εάν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

βρείτε μη μηδενικό 3×3 πίνακα B τέτοιο ώστε $AB = O$.

Απάντηση: Για το (a), παρατηρήστε ότι η συνθήκη $AB = O$ είναι ισοδύναμη με τις συνθήκες $Ab_j = 0$ για $1 \leq j \leq p$, όπου b_j είναι οι στήλες του πίνακα B . Ας υποθέσουμε ότι $AB = O$. Αυτό σημαίνει ότι $Ab_j = 0$ για κάθε $1 \leq j \leq p$. Έστω $v \in \mathcal{R}(B)$. Τότε $v = \sum_{j=1}^p \lambda_j b_j$ για κάποια $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$Av = A \sum_{j=1}^p \lambda_j b_j = \sum_{j=1}^p \lambda_j Ab_j = 0$$

Άρα $v \in \mathcal{N}(A)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{N}(A)$. Τότε για κάθε διάνυσμα $v \in \mathcal{R}(B)$ ισχύει $v \in \mathcal{N}(A)$ δηλαδή $Av = 0$. Παρατηρήστε ότι $b_j \in \mathcal{R}(B)$ για $1 \leq j \leq p$, οπότε $Ab_j = 0$ για $1 \leq j \leq p$.

Για το (b), αφού θέλω ένα πίνακα $B \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ ο οποίος να ικανοποιεί $AB = O$, από το ερώτημα (a) θα πρέπει να ικανοποιεί $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{N}(A)$. Θα βρώ τρία διανύσματα στο $\mathcal{N}(A)$ και θα τα ορίσω ως στήλες του B .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα $\mathcal{N}(A) = \{z(-1, 1, 1) : z \in \mathbb{R}\}$. Ένας πίνακας που ικανοποιεί τη συνθήκη $AB = O$ είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5.9 Έστω $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathbb{R}^n$. Έστω $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$. Θα δείξουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος.

a. Δείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ τέτοιοι ώστε $e_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i$, για κάθε $1 \leq j \leq n$.

b. Δείξτε ότι

$$B \cdot \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = e_j, \quad \text{για κάθε } 1 \leq j \leq n.$$

c. Δείξτε ότι ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφό του.

Απάντηση: Για το (a), βλέπουμε ότι $e_j \in \mathbb{R}^n = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ για $1 \leq j \leq n$, οπότε κάθε e_j γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_n$. Άρα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ τέτοιοι ώστε

$$e_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i, \quad \text{για } 1 \leq j \leq n$$

Για το (b), παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i = B \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

όπου B είναι ο πίνακας με στήλες τα $v_1, \dots, v_n$ (με αυτή τη σειρά).

Για το (c), βλέπουμε ότι οι σχέσεις

$$B \cdot \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = e_j, \quad \text{για κάθε } 1 \leq j \leq n.$$

που δείξαμε ότι ισχύουν είναι ισοδύναμες με τη σχέση $BA = I$, όπου $A = (a_{i,j})$ και I είναι ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας. Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος και $B^{-1} = A$.