

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 4.1 Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες.

- a. $E_{i,j}(-\kappa)^{-1} \cdot D_i(\lambda) = D_i(1/\lambda)^{-1} \cdot E_{i,j}(\kappa/\lambda)$.
b. $P_{i,j}^{-1} = D_j(-1) \cdot E_{i,j}(1) \cdot E_{j,i}(-1) \cdot E_{i,j}(1)$.

Άσκηση 4.2

- a. Αποδείξτε ότι αν A και B αμφότεροι άνω (ή κάτω) τριγωνικοί πίνακες με 1 στη διαγώνιο, τότε ο AB είναι επίσης άνω (ή κάτω) τριγωνικός με 1 στην διαγώνιο.
b. Αποδείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος άνω (ή κάτω) τριγωνικός, τότε το ίδιο ισχύει και για τον A^{-1} . Μάλιστα, αν ο A έχει μόνο 1 στην διαγώνιο του, το ίδιο θα ισχύει και για τον A^{-1} .
Υπόδειξη: Βρείτε τον αντίστροφο με την διαδικασία Gauss-Jordan.

Άσκηση 4.3 Αν ο A έχει ανάλυση LU, δείξτε ότι αυτή είναι μοναδική.

Άσκηση 4.4 Βρείτε την ανάλυση LU των πινάκων

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.5 Λύστε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

χωρίς να κάνετε τον πολλαπλασιασμό των πινάκων.

Άσκηση 4.6 Έστω ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει σύνολο λύσεων το $S = \{(1, 2, 0, 1) + t(1, 1, 1, 2) + s(0, 1, 2, 1) : t, s \in \mathbb{R}\}$. Να λυθεί το σύστημα $Ax = 0$.

Άσκηση 4.7 Βρείτε κλιμακωτό U , κάτω τριγωνικό L και πίνακα μετάθεσης P , τέτοιους ώστε $PA = LU$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ και } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.8 Για ποιά $b = (b_1, b_2, b_3)$, έχει λύση το σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.9 Λύστε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ και βρείτε ποιών διανυσμάτων είναι γραμμικός συνδυασμός η γενική λύση του συστήματος, όπου A οι πίνακες της Άσκησης 4.7.

Άσκηση 4.10 Επιλέξτε κατάλληλο y , ώστε οι παρακάτω πίνακες να έχουν τάξη ίση με

a. 1,

b. 2,

c. 3.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ y & 2 & y \end{pmatrix}.$$