

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 4.1 Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες.

$$\alpha'. E_{i,j}(-\kappa)^{-1} \cdot D_i(\lambda) = D_i(1/\lambda)^{-1} \cdot E_{i,j}(\kappa/\lambda).$$

$$\beta'. P_{i,j}^{-1} = D_j(-1) \cdot E_{i,j}(1) \cdot E_{j,i}(-1) \cdot E_{i,j}(1).$$

Απάντηση: Ας ξεκινήσουμε με την πρώτη ισότητα. Καταρχάς αντικαθιστούμε τον πίνακα $E_{i,j}(-\kappa)^{-1}$ με τον ίσο του $E_{i,j}(\kappa)$. Τώρα το αριστερό μέρος αντιστοιχεί τις πράξεις γραμμών $r_i \leftarrow \lambda r_i$ και $r_i \leftarrow r_i + \kappa r_j$ (με αυτήν την σειρά). Με άλλα λόγια επηρεάζεται μόνο η γραμμή r_i ως εξής: $r_i \mapsto \lambda r_i + \kappa r_j$.

Ομοίως, στο δεξί μέρος αντιστοιχεί στις πράξεις γραμμών $r_i \leftarrow r_i + \frac{\kappa}{\lambda} r_j$ και $r_i \leftarrow \lambda r_i$ (με αυτήν την σειρά). Παρατηρούμε ότι και πάλι επηρεάζεται μόνο η γραμμή r_i ως εξής: $r_i \mapsto \lambda r_i + \kappa r_j$.

Δείξαμε ότι για κάθε A ,

$$E_{i,j}(-\kappa)^{-1} \cdot D_i(\lambda)A = D_i(1/\lambda)^{-1} \cdot E_{i,j}(\kappa/\lambda)A,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο για $A = I$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η δεύτερη ισότητα.

Άσκηση 4.2

α' . Αποδείξτε ότι αν A και B αμφότεροι άνω (ή κάτω) τριγωνικοί πίνακες με 1 στη διαγώνιο, τότε ο AB είναι επίσης άνω (ή κάτω) τριγωνικός με 1 στην διαγώνιο.

β' . Αποδείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος άνω (ή κάτω) τριγωνικός, τότε το ίδιο ισχύει και για τον A^{-1} . Μάλιστα, αν ο A έχει μόνο 1 στην διαγώνιό του, το ίδιο θα ισχύει και για τον A^{-1} .

Υπόδειξη: Βρείτε τον αντίστροφο με την διαδικασία Gauss-Jordan.

Απάντηση:

α' . Γνωρίζουμε ότι ο AB θα είναι άνω (ή κάτω) τριγωνικός, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι τα στοιχεία της κεντρικής διαγωνίου του θα ισούνται με 1. Έστω $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ αμφότεροι άνω τριγωνικοί με 1 στη διαγώνιο. Για $i = 1, \dots, n$, έχουμε

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} \underbrace{B_{k,i}}_{=1} + \underbrace{A_{i,i}}_{=1} \underbrace{B_{i,i}}_{=1} + \sum_{k=i+1}^n A_{i,k} \underbrace{B_{k,i}}_{=0} = 1.$$

Ομοίως εργαζόμαστε και στην περίπτωση που είναι αμφότεροι κάτω τριγωνικοί.

β' . Έστω ότι ο A είναι άνω τριγωνικός. Τότε στην διαδικασία εύρεσης αντιστρόφου Gauss-Jordan, θα ξεκινήσουμε με έναν πίνακα της μορφής

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} & \\ 0 & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n,n} & \end{array} \quad I_n \right).$$

Προκειμένου να μετατρέψουμε το αριστερό μέρος σε I_n , είναι ξεκάθαρο ότι θα χρειαστούμε αποκλειστικά πράξεις γραμμών της μορφής $r_i \leftarrow \lambda r_i$ και $r_i \leftarrow r_i + \lambda r_j$ με $i < j$. Αυτό σημαίνει ότι ο A^{-1} είναι γινόμενο πινάκων της μορφής $D_i(\lambda)$ και $E_{i,j}(\lambda)$, με $i < j$. Εφόσον όλοι αυτοί οι πίνακες είναι άνω τριγωνικοί, το ίδιο θα ισχύει και για τον A^{-1} .

Στην περίπτωση που ο A έχει μόνο 1 στην διαγώνιο, παρατηρούμε ότι δεν θα χρειαστούν πράξεις γραμμών της μορφής $r_i \leftarrow \lambda r_i$, επομένως ο A^{-1} θα είναι γινόμενο πινάκων της μορφής $E_{i,j}(\lambda)$, με $i < j$. Όλοι αυτοί οι πίνακες είναι άνω τριγωνικοί με 1 στην διαγώνιο, άρα (σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα), το ίδιο θα ισχύει και για το γινόμενό τους.

Άσκηση 4.3 Αν ο A έχει ανάλυση LU, δείξτε ότι αυτή είναι μοναδική.

Απάντηση: Έστω $A = LU$ και $A = L'U'$ δύο διαφορετικές αναλύσεις LU του A . Τότε L, L' κάτω τριγωνικοί με 1 στην διαγώνιο και U, U' άνω τριγωνικοί. Έχουμε ότι

$$LU = L'U' \Rightarrow (L')^{-1}L = U'U^{-1}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη άσκηση, παρατηρούμε ότι στο αριστερό μέρος της τελευταίας εξίσωσης, έχουμε έναν κάτω τριγωνικό πίνακα και στο δεξί έναν άνω τριγωνικό. Επειδή οι πίνακες είναι ίσοι αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι οι πίνακες αυτοί είναι διαγώνιοι. Μάλιστα, επίσης από την προηγούμενη άσκηση, παίρνουμε ότι η διαγώνιος του $(L')^{-1}L$ έχει παντού 1.

Καταλήγουμε ότι $(L')^{-1}L = U'U^{-1} = I \iff L = L'$ και $U = U'$.

Άσκηση 4.4 Βρείτε την ανάλυση LU των πινάκων

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - \frac{r_1}{3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - \frac{r_1}{3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 8/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - \frac{r_2}{4}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Καταλήγουμε ότι

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

και

$$L = E_{2,1}(-1/3)^{-1}E_{3,1}(-1/3)^{-1}E_{3,2}(-1/4)^{-1} = E_{2,1}(1/3)E_{3,1}(1/3)E_{3,2}(1/4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ομοίως βρίσκουμε και την ανάλυση LU του δεύτερου πίνακα.

Άσκηση 4.5 Λύστε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

χωρίς να κάνετε τον πολλαπλασιασμό των πινάκων.

Απάντηση: Θα ξεκινήσουμε με το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Με ευθεία αντικατάσταση παίρνουμε διαδοχικά: $y_1 = 2$, $y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -2$ και $y_1 + y_3 = 2 \Rightarrow y_3 = 0$. Άρα $y = (2, -2, 0)$. Έπειτα συνεχίζουμε με το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

το οποίο λύνουμε με ανάδρομη αντικατάσταση και παίρνουμε

$$x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 0.$$

Άσκηση 4.6 Έστω ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει σύνολο λύσεων το $S = \{(1, 2, 0, 1) + t(1, 1, 1, 2) + s(0, 1, 2, 1) : t, s \in \mathbb{R}\}$. Να λυθεί το σύστημα $Ax = 0$.

Απάντηση: Για $s = t = 0$ παίρνουμε ότι το διάνυσμα $(1, 2, 0, 1)$ είναι μια λύση του συστήματος $Ax = b$. Καταλήγουμε ότι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς θα είναι η

$$\begin{aligned} x &= (1, 2, 0, 1) - [(1, 2, 0, 1) + t(1, 1, 1, 2) + s(0, 1, 2, 1)] = -t(1, 1, 1, 2) - s(0, 1, 2, 1), \quad s, t \in \mathbb{R} \\ &= \sigma(1, 1, 1, 2) + \tau(0, 1, 2, 1), \quad \sigma, \tau \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.7 Βρείτε κλιμακωτό U , κάτω τριγωνικό L και πίνακα μετάθεσης P , τέτοιους ώστε $PA = LU$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Θα δείξουμε τον δεύτερο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι εναλλαγές γραμμών που πραγματοποιήσαμε ήταν (με την σειρά) $r_1 \leftrightarrow r_2$ και $r_2 \leftrightarrow r_4$, επομένως ο πίνακας μετάθεσης θα είναι ο

$$P = P_{2,4}P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η απαλοιφή Gauss στον πίνακα αυτόν προχωράει ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

που είναι σε κλιμακωτή μορφή. Επομένως

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$L = E_{2,1}(-1)^{-1}E_{3,1}(-3)^{-1} = E_{2,1}(1)E_{3,1}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.8 Για ποιά $b = (b_1, b_2, b_3)$, έχει λύση το σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο πρώτος πίνακας είναι αντιστρέψιμος, επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Για το δεύτερο, πρέπει το b να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα, δηλαδή $b = x_1(1, 0, 0) + x_2(1, 1, 0) + x_3(1, 1, 0) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, 0) = (y_1, y_2, 0)$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4.9 Λύστε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ και βρείτε ποιών διανυσμάτων είναι γραμμικός συνδυασμός η γενική λύση του συστήματος, όπου A οι πίνακες της Άσκησης 4.7.

Άσκηση 4.10 Επιλέξτε κατάλληλο y , ώστε οι παρακάτω πίνακες να έχουν τάξη ίση με

α'. 1,

β'. 2,

γ'. 3.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ y & 2 & y \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Θα ασχοληθούμε με τον πρώτο πίνακα. Έτσι έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & y \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + \frac{r_1}{2}} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & y \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - \frac{3r_1}{2}} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & y-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $y = 3$, τότε ο πίνακας έχει τάξη 1 (έχουμε έναν οδηγό) και αν $y \neq 3$, τότε έχει τάξη 2 (έχουμε δύο οδηγούς).