

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 3.1 Βρείτε, χωρίς την μέθοδο Gauss-Jordan, τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων (αν υπάρχουν):

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3.2 Βρείτε, με την μέθοδο Gauss-Jordan, τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων (αν υπάρχουν)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3.3 Εάν A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, δείξτε ότι ο $I - BA$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο $I - AB$ είναι αντιστρέψιμος.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $B(I - AB) = (I - BA)B$.

Άσκηση 3.4 Δείξτε ότι ένας διαγώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία στην διαγώνιό του είναι μη μηδενικά. Ποιος είναι ο αντίστροφός του σε αυτήν την περίπτωση;

Άσκηση 3.5 Έστω A αντιστρέψιμος και $k \in \mathbb{R}$, με $k \neq 0$, δείξτε ότι kA αντιστρέψιμος και $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Άσκηση 3.6 Έστω $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε $A^k = 0$ για κάποιο $k \geq 1$. Δείξτε ότι ο $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

Άσκηση 3.7 Δείξτε ότι αν A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε $(A^T B^T)^{-1} = (A^{-1} B^{-1})^T$.

Άσκηση 3.8 Έστω $R \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $A \in \text{Mat}_m(\mathbb{R})$ συμμετρικός.

a. Τι σχήμα (διαστάσεις) έχει ο πίνακας $R^T A R$; Δείξτε ότι είναι συμμετρικός.

b. Δείξτε ότι ο $R^T R$ δεν έχει αρνητικές τιμές στην διαγώνιο.

Άσκηση 3.9 Συμπληρώστε τα κενά στους παρακάτω πίνακες, ώστε να είναι συμμετρικοί

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 6 & \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 8 & 9 \\ -4 & 7 & 7 \\ & 2 & 6 & 4 \\ & 7 & & 9 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3.10 Έστω A, B, C τετραγωνικοί πίνακες ίδιου σχήματος (διάστασης), τέτοιοι ώστε $A = B + C$. Αν ο B είναι συμμετρικός και ο C αντισυμμετρικός, δείξτε ότι $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ και $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$. (Επομένως αυτή η γραφή του A ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού είναι μοναδική).

Άσκηση 3.11 Έστω $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $B \in \text{Mat}_{n \times p}(\mathbb{R})$.

- Δείξτε ότι η i -στή γραμμή του πίνακα AB είναι ίση με τον γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του B με συντελεστές τις εγγραφές της i -στής γραμμής του A .
- Δείξτε ότι η j -στή στήλη του πίνακα AB είναι ίση με τον γραμμικό συνδυασμό των στηλών του A με συντελεστές τις εγγραφές της j -στής στήλης του B .

Άσκηση 3.12 Χρησιμοποιώντας το Ερώτημα α της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι:

- ο εξ' αριστερών πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A με τον $E_{i,j}(\lambda)$ αντιστοιχεί στην πράξη γραμμών $r_i \leftarrow r_i + \lambda r_j$,
- ο εξ' αριστερών πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A με τον $D_j(\lambda)$ αντιστοιχεί στην πράξη γραμμών $r_j \leftarrow \lambda \cdot r_j$ και
- ο εξ' αριστερών πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A με τον $P_{i,j}$ αντιστοιχεί στην πράξη γραμμών $r_j \leftrightarrow r_i$.