

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 3.1 Βρείτε, χωρίς την μέθοδο Gauss-Jordan, τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων (αν υπάρχουν):

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Θέτουμε

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Τότε έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + y = 1, \\ 8x + 3y = 0, \\ 3z + w = 1, \\ 8z + 3w = 1. \end{cases}$$

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα και παίρνουμε $x = 3, y = -8, z = -1$ και $w = 3$. Επομένως

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ομοίως μπορούμε να υπολογίσουμε και τον αντίστροφο του δεύτερου πίνακα.

Άσκηση 3.2 Βρείτε, με την μέθοδο Gauss-Jordan, τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων (αν υπάρχουν)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Θα βρούμε τον αντίστροφο του δεύτερου πίνακα:

$$\begin{aligned} (A | I) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + \frac{r_1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - \frac{r_2}{3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 3r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 - 4r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5/3 & 4/3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow \frac{r_2}{3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5/3 & 4/3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftarrow \frac{r_1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/6 & 2/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} = (I \mid A^{-1}).$$

Επομένως,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5/6 & 2/3 & -2 \\ 1/3 & 2/3 & -1 \\ -1/6 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3.3 Εάν A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, δείξτε ότι ο $I - BA$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο $I - AB$ είναι αντιστρέψιμος.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $B(I - AB) = (I - BA)B$.

Απάντηση: Καταρχάς παρατηρούμε ότι $B(I - AB) = B - BAB = (I - BA)B$. Αν υποθέσουμε ότι $I - BA$ αντιστρέψιμος, τότε

$$B(I - AB) = (I - BA)B \xrightarrow{B \text{ αντιστρέψιμος}} I - AB = B^{-1}(I - BA)B,$$

δηλαδή ο $I - AB$ γράφεται ως γινόμενο αντιστρέψιμων, που σημαίνει ότι είναι αντιστρέψιμος. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι ο $I - BA$ είναι αντιστρέψιμος αν υποθέσουμε ότι $I - AB$ αντιστρέψιμος.

Άσκηση 3.4 Δείξτε ότι ένας διαγώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία στην διαγώνιό του είναι μη μηδενικά. Ποιος είναι ο αντίστροφός του σε αυτήν την περίπτωση;

Απάντηση: Αν ένας διαγώνιος έχει κάποιο μηδενικό στοιχείο στην διαγώνιό του, τότε η αντίστοιχη γραμμή (και στήλη) είναι μηδενική, άρα δεν είναι αντιστρέψιμος.

Έστω τώρα ο διαγώνιος πίνακας με διαγώνιο $a_1, \dots, a_n, a_i \neq 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο αντίστροφός του είναι ο διαγώνιος με στοιχεία διαγωνίου τα $a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$.

Άσκηση 3.5 Έστω A αντιστρέψιμος και $k \in \mathbb{R}$, με $k \neq 0$, δείξτε ότι kA αντιστρέψιμος και $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Άσκηση 3.6 Έστω $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε $A^k = 0$ για κάποιο $k \geq 1$. Δείξτε ότι ο $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$

Απάντηση: Θα δείξουμε ότι για κάθε πίνακα $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ και κάθε $m \geq 1$, ισχύει ότι $I_n - B^m = (I_n - B)(I_n + B + \dots + B^{m-1})$. Πράγματι,

$$(I_n - B)(I_n + B + \dots + B^{m-1}) = (I_n + B + \dots + B^{m-1}) - (B + B^2 + \dots + B^m) = I_n - B^m.$$

Επομένως,

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = I_n - A^k = I_n - 0 = I_n$$

και το ζητούμενο έπεται.

Άσκηση 3.7 Δείξτε ότι αν A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε $(A^T B^T)^{-1} = (A^{-1} B^{-1})^T$.

Απάντηση: Έχουμε ότι

$$(A^T B^T)^{-1} = (B^T)^{-1} (A^T)^{-1} = (B^{-1})^T (A^{-1})^T = (A^{-1} B^{-1})^T.$$

Άσκηση 3.8 Έστω $R \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $A \in \text{Mat}_m(\mathbb{R})$ συμμετρικός.

- a. Τι σχήμα (διαστάσεις) έχει ο πίνακας $R^T AR$; Δείξτε ότι είναι συμμετρικός.
 b. Δείξτε ότι ο $R^T R$ δεν έχει αρνητικές τιμές στην διαγώνιο.

Άσκηση 3.9 Συμπληρώστε τα κενά στους παρακάτω πίνακες, ώστε να είναι συμμετρικοί

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 6 & \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 8 & 9 \\ -4 & 7 & 7 \\ & 2 & 6 & 4 \\ & 7 & & 9 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3.10 Έστω A, B, C τετραγωνικοί πίνακες ίδιου σχήματος (διάστασης), τέτοιοι ώστε $A = B + C$. Αν ο B είναι συμμετρικός και ο C αντισυμμετρικός, δείξτε ότι $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ και $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$. (Επομένως αυτή η γραφή του A ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού είναι μοναδική).

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι

$$A + A^T = (B + C) + (B + C)^T = B + C + B^T + C^T = B + C + B - C = 2B.$$

Άρα $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$. Ομοίως,

$$A - A^T = (B + C) - (B + C)^T = B + C - B^T - C^T = B + C - B + C = 2C,$$

άρα $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$.

Άσκηση 3.11 Έστω $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $B \in \text{Mat}_{n \times p}(\mathbb{R})$.

- a. Δείξτε ότι η i -στή γραμμή του πίνακα AB είναι ίση με τον γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του B με συντελεστές τις εγγραφές της i -στής γραμμής του A .
 b. Δείξτε ότι η j -στή στήλη του πίνακα AB είναι ίση με τον γραμμικό συνδυασμό των στηλών του A με συντελεστές τις εγγραφές της j -στής στήλης του B .

Απάντηση: Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων, προκύπτει ότι η i -στη γραμμή του AB είναι η εξής:

$$\left(\sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,1}, \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,2}, \dots, \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,p} \right) = \sum_{k=1}^n A_{i,k} (B_{k,1}, \dots, B_{k,p}).$$

Ομοίως αποδεικνύεται και το δεύτερο ερώτημα.

Άσκηση 3.12 Χρησιμοποιώντας το Ερώτημα a της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι:

- a. ο εξ' αριστερών πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A με τον $E_{i,j}(\lambda)$ αντιστοιχεί στην πράξη γραμμών $r_i \leftarrow r_i + \lambda r_j$,
 b. ο εξ' αριστερών πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A με τον $D_j(\lambda)$ αντιστοιχεί στην πράξη γραμμών $r_j \leftarrow \lambda \cdot r_j$ και
 c. ο εξ' αριστερών πολλαπλασιασμός ενός πίνακα A με τον $P_{i,j}$ αντιστοιχεί στην πράξη γραμμών $r_j \leftrightarrow r_i$.

Απάντηση: Θα δείξουμε το πρώτο ερώτημα και τα άλλα δύο προκύπτουν παρόμοια. Για διευκόλυνσή μας, θέτουμε $\varepsilon_{m,n}$ ως την εγγραφή με συντεταγμένες m, n του πίνακα $E_{i,j}(\lambda)$. Τότε $\varepsilon_{i,j} = \lambda$, $\varepsilon_{m,m} = 1$ και $\varepsilon_{m,n} = 0$ αν $m \neq n$ και $(m, n) \neq (i, j)$.

Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα της προηγούμενης άσκησης, η m -στή γραμμή του $E_{i,j}(\lambda)A$ είναι η

$$\sum_k \varepsilon_{m,k}(A_{k,1}, \dots, A_{k,p}).$$

Αν $m \neq i$, τότε το τελευταίο δίνει

$$\sum_k \varepsilon_{m,k}(A_{k,1}, \dots, A_{k,p}) = (A_{m,1}, \dots, A_{m,p}),$$

ενώ αν $m = i$, δίνει

$$\sum_k \varepsilon_{i,k}(A_{k,1}, \dots, A_{k,p}) = \underbrace{(A_{i,1}, \dots, A_{i,p})}_{k=i} + \underbrace{\lambda(A_{j,1}, \dots, A_{j,p})}_{k=j} = (A_{i,1} + \lambda A_{j,1}, \dots, A_{i,p} + \lambda A_{j,p}).$$

Το ζητούμενο έπεται.