

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 2.1 Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \sqrt{2}/3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \pi/6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.2

- Φτιάξτε τον 2×3 πίνακα $A = (a_{i,j})$ όπου $a_{i,j} = i + 2j$.
- Φτιάξτε τον 3×3 πίνακα $B = (b_{i,j})$ όπου $b_{i,j} = i^2 + j^2$.
- Υπολογίστε το γινόμενο AB .

Άσκηση 2.3 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τον πίνακα A^2 . Δείξτε ότι $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.4 Βρείτε παράδειγμα πραγματικού 2×2 πίνακα $B \neq O$ που να ικανοποιεί $B^2 = O$.

Άσκηση 2.5 Βρείτε τις δυνάμεις $A, A^2, A^3, \dots, A^n$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 2.6 Υπολογίστε τα γινόμενα FGH και HGF (έχουμε παραλείψει τα μηδενικά πάνω από τη διαγώνιο):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.7 Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, δείξτε ότι ένας 2×2 πίνακας B μετατίθεται με τον A , δηλαδή ικανοποιεί $AB = BA$, αν και μόνο αν $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.8 Αν A, B είναι 2×2 πίνακες που το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης τους είναι ίσο με 1, δείξτε ότι και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του AB είναι ίσο 1. Αποδείξτε το ίδιο εάν A, B είναι $n \times n$ πίνακες.