

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 2.1 Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \sqrt{2}/3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \pi/6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.2

- Φτιάξτε τον 2×3 πίνακα $A = (a_{i,j})$ όπου $a_{i,j} = i + 2j$.
- Φτιάξτε τον 3×3 πίνακα $B = (b_{i,j})$ όπου $b_{i,j} = i^2 + j^2$.
- Υπολογίστε το γινόμενο AB .

Απάντηση: Υπολογίζουμε

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \\ 10 & 13 & 18 \end{pmatrix}$$

και το γινόμενο τους είναι

$$AB = \begin{pmatrix} 101 & 146 & 221 \\ 118 & 172 & 262 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.3 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τον πίνακα A^2 . Δείξτε ότι $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Άρα παρατηρούμε ότι $A^2 = A$. Βλέπουμε ότι η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει για $n = 1$ και $n = 2$. Θα την αποδείξουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με επαγωγή στο n . Η βάση της επαγωγής ισχύει:

$A^1 = A$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το τυχόν n , δηλαδή υποθέτουμε ότι $A^n = A$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A = A.$$

Παρατηρήστε ότι κάναμε χρήση της επαγωγικής υπόθεσης, αλλά και του $A^2 = A$, που δείξαμε παραπάνω.

Άσκηση 2.4 Βρείτε παράδειγμα πραγματικού 2×2 πίνακα $B \neq O$ που να ικανοποιεί $B^2 = O$.

Απάντηση: Μπορούμε να βρούμε άπειρους τέτοιους πίνακες. Όταν προχωρήσουμε στο μάθημα, θα μάθετε ποιά είναι μία ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιεί κάθε τετραγωνικός πίνακας B τέτοιος ώστε $B^2 = O$. Προς το παρόν, μπορούμε να δούμε ότι για οποιοδήποτε $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$$

έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

Άσκηση 2.5 Βρείτε τις δυνάμεις $A, A^2, A^3, \dots, A^n$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Απάντηση: Υπολογίζουμε μερικές αρχικές δυνάμεις του A για να “δούμε” ποιός είναι ο πίνακας A^n . Βλέπουμε ότι

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θα αποδείξουμε, με επαγωγή στο n , ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η βάση της επαγωγής, δηλαδή η πρόταση για $n = 1$, ισχύει. Υποθέτω ότι για το τυχόν n , η πρόταση ισχύει. Θα αποδείξω ότι η πρόταση ισχύει για $n + 1$, δηλαδή ότι

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Πραγματικά, έχουμε

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.6 Υπολογίστε τα γινόμενα FGH και HGF (έχουμε παραλείψει τα μηδενικά πάνω από τη διαγώνιο):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Μπορούμε να υπολογίσουμε τα γινόμενα με τον ορισμό. Παρατηρούμε όμως, ότι οι τρεις πίνακες είναι στοιχειώδεις (είναι πίνακες διάτμησης). Οπότε, το γινόμενο GH προκύπτει αν στον πίνακα H κάνουμε την πράξη γραμμών $r_3 \leftarrow r_3 + 2r_2$. Οπότε

$$GH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρόμοια, το γινόμενο $FGH = F(GH)$ προκύπτει κάνοντας το μετασχηματισμό $r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1$ στον πίνακα GH .

$$FGH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρόμοια μπορούμε να εργαστούμε για να υπολογίσουμε τον πίνακα HGF .

Άσκηση 2.7 Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, δείξτε ότι ένας 2×2 πίνακας B μετατίθεται με τον A , δηλαδή ικανοποιεί

$AB = BA$, αν και μόνο αν $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Έστω $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Επίσης,

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$AB = BA \iff \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \iff c = 0, \quad a = d, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 2.8 Αν A, B είναι 2×2 πίνακες που το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης τους είναι ίσο με 1, δείξτε ότι και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του AB είναι ίσο 1. Αποδείξτε το ίδιο εάν A, B είναι $n \times n$ πίνακες.

Απάντηση: Θα αποδείξουμε την πρόταση για $n \times n$ πίνακες. Η j στήλη του πίνακα A και αντίστοιχα του πίνακα B είναι η

$$\begin{pmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{n,j} \end{pmatrix} \quad \text{και αντίστοιχα} \quad \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Η υπόθεση μας είναι ότι $\sum_{i=1}^n A_{i,j} = \sum_{i=1}^n B_{i,j} = 1$ για κάθε $1 \leq j \leq n$. Η j στήλη του πίνακα AB είναι η

$$\begin{pmatrix} (AB)_{1,j} \\ \vdots \\ (AB)_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{1,k} B_{k,j} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n A_{n,k} B_{k,j} \end{pmatrix}.$$

Το άθροισμα των στοιχείων της j στήλης του AB είναι ίσο με

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^n B_{k,j} \sum_{i=1}^n A_{i,k} = \sum_{k=1}^n B_{k,j} = 1.$$