

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1.1 Λύστε τα παρακάτω συστήματα:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & & + & 2z = 3 \\ 2x & + & 2y & + 3z = 9 \\ x & + & 2y & = 5 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & 5z & + & 3w = 1 \\ 6x & + & y & + & 5z & + & 4w = -1 \\ 4x & - & y & & & + & w = 3 \\ & & 5y & + & 9z & + & w = 2 \end{array} \right\}$$

Άσκηση 1.2 Να λυθεί το ομογενές σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -x_1 & & + & 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + x_3 + 6x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Δώστε πέντε μη-μηδενικές λύσεις του συστήματος.

Άσκηση 1.3 Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα με τους ακόλουθους επαυξημένους πίνακες:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & 9 \end{array} \right),$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right).$$

Άσκηση 1.4 Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το παρακάτω σύστημα έχει λύση. Για τις τιμές αυτές λύστε το σύστημα.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & + & y & + 2z = 0 \\ 5x & + & 6y & - \lambda z = 1 \\ x & + & 2y & + \lambda z = \lambda \end{array} \right\}$$

Άσκηση 1.5 Βρείτε για ποιές τιμές των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}$, καθένα από τα παρακάτω συστήματα: (i) δεν έχει λύση, (ii) έχει άπειρες λύσεις, (iii) έχει μοναδική λύση. Λύστε το σύστημα στις δύο τελευταίες περιπτώσεις.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & - & y & + z = 1 \\ ax & & & + z = b \\ x & + & y & + 2z = 3 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{cccc} x & + & y & + z = a \\ x & - & y & = 0 \\ 3x & + & y & + bz = 0 \end{array} \right\}$$

Άσκηση 1.6 Βρείτε ποιά σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει λύση.

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x & & - & z & = & a \\ -x & + & y & & = & b \\ -2x & + & y & + & z & = & c \end{array} \right\}$$

Άσκηση 1.7 Δίνεται το γραμμικό σύστημα Σ_1 : $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = b_i$, για $1 \leq i \leq m$ (για κάθε τιμή του i έχουμε μία εξίσωση). Σταθεροποιήστε δύο δείκτες $1 \leq i_1, i_2 \leq m$ και θεωρήστε το σύστημα Σ_2 που προκύπτει από το Σ_1 εάν αντικαταστήσουμε την εξίσωση i_2 με το άθροισμα της εξίσωσης i_2 σύν λ φορές την εξίσωση i_1 . Δηλαδή η i_2 εξίσωση του Σ_2 είναι η $\sum_{j=1}^n (a_{i_2,j} + \lambda a_{i_1,j})x_j = b_{i_2} + \lambda b_{i_1}$. Δείξτε ότι η n -άδα $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ είναι λύση του Σ_1 αν και μόνο αν είναι λύση του συστήματος Σ_2 .