

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1.1 Λύστε τα παρακάτω συστήματα:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & + & & + 2z = 3 \\ 2x & + & 2y & + 3z = 9 \\ x & + & 2y & = 5 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & 5z & + & 3w = 1 \\ 6x & + & y & + & 5z & + & 4w = -1 \\ 4x & - & y & & & + & w = 3 \\ & & 5y & + & 9z & + & w = 2 \end{array} \right\}$$

Άσκηση 1.2 Να λυθεί το ομογενές σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -x_1 & & + & 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + x_3 + 6x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Δώστε πέντε μη-μηδενικές λύσεις του συστήματος.

Απάντηση: Γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \end{array} \right).$$

Παρατηρήστε ότι σε ένα ομογενές σύστημα (δηλαδή ένα σύστημα στο οποίο η σταθερές στο δεύτερο μέλος είναι όλες ίσες με 0), το δεύτερο μέλος θα παραμείνει 0 σε κάθε βήμα της απαλοιφής Gauss. Γι' αυτό το λόγο συνήθως δεν το γράφουμε: κάνουμε απαλοιφή στον πίνακα του συστήματος (και όχι τον επαυξημένο).

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) & \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + 3r_1} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + 2r_1} \\ \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \end{array} \right) & \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Η τελευταία γραμμή είναι μηδενική, αλλά και το 2ο μέλος είναι ίσο με 0. Παρατηρήστε ότι ένα ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο: έχει πάντα τη μηδενική λύση (όλες οι μεταβλητές ίσες με 0). Συνεχίζουμε με ανάδρομη αντικατάσταση:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 + 5x_4 \\ x_2 &= -5x_3 - 16x_4 \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο των λύσεων είναι

$$\{(2x_3 + 5x_4, -5x_3 - 16x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \\ \{x_3(2, -5, 1, 0) + x_4(5, -16, 0, 1) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Για να βρούμε συγκεκριμένες λύσεις, βάζουμε τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές. Για παράδειγμα,

$$\begin{array}{llll} \text{Για } x_3 = 0, x_4 = 0 & \text{παίρνουμε} & (0, 0, 0, 0) \\ \text{Για } x_3 = 0, x_4 = 1 & \text{παίρνουμε} & (5, -16, 0, 1) \\ \text{Για } x_3 = 1, x_4 = 0 & \text{παίρνουμε} & (2, -5, 1, 0) \\ \text{Για } x_3 = 0, x_4 = -1 & \text{παίρνουμε} & (-5, 16, 0, -1) \\ \text{Για } x_3 = 1, x_4 = 1 & \text{παίρνουμε} & (7, -21, 1, 1) \end{array}$$

Άσκηση 1.3 Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα με τους ακόλουθους επαυξημένους πίνακες:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & 9 \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right).$$

Απάντηση: Αρχίζουμε με το πρώτο σύστημα. Εφαρμόζουμε την μέθοδο απαλοιφής Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + r_1} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & -9 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Η τελευταία γραμμή είναι μηδενική, με μηδέν στο δεξιό μέλος. Οι οδηγοί είναι 1 και 1 στην πρώτη και τη δεύτερη γραμμή, άρα οι μεταβλητές x_1, x_2 είναι δεσμευμένες, ενώ οι x_3, x_4 είναι ελεύθερες. Κάνουμε ανάδρομη αντικατάσταση και παίρνουμε

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 9 - 4x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι

$$\{(4 - 2x_3 - 2x_4, 9 - 4x_3 - 3x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \\ \{(4, 9, 0, 0) + x_3(-2, -4, 1, 0) + x_4(-2, -3, 0, 1) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Το δεύτερο σύστημα είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή. Ο οδηγός είναι το 1 στην πρώτη στήλη. Το x_1 είναι δεσμευμένη μεταβλητή και οι x_2, x_3, x_4 είναι ελεύθερες. Η ανάδρομη αντικατάσταση δίνει $x_1 = 9 - x_2 - 3x_3 - 5x_4$ και σύνολο λύσεων

$$\{(9 - x_2 - 3x_3 - 5x_4, x_2, x_3, x_4) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \\ \{(9, 0, 0, 0) + x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-3, 0, 1, 0) + x_4(-5, 0, 0, 1) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Για το τρίτο σύστημα έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + 5r_1} \\
 & \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 27 & 9 & 9 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 + 2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 27 & 9 & 9 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 3 & 3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \\
 & \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 27 & 9 & 9 & 18 \\ 0 & 3 & 9 & 3 & 3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 9r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 18 & 9 & -9 & -9 \\ 0 & 3 & 9 & 3 & 3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 - 3r_2} \\
 & \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 18 & 9 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 - \frac{1}{3}r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 18 & 9 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Η τελευταία γραμμή είναι μηδενική και το δεύτερο μέλος είναι επίσης μηδέν. Οι οδηγοί είναι $-1, 1, 18$ στις στήλες 1,2,3 αντίστοιχα. Οι δεσμευμένες μεταβλητές είναι οι x_1, x_2, x_3 και οι ελεύθερες οι x_4, x_5 . Κάντε την ανάδρομη αντικατάσταση για να βρείτε τις λύσεις του συστήματος.

Το τέταρτο σύστημα είναι επίσης σε κλιμακωτή μορφή. Οι οδηγοί είναι $1, 2, 2$ στις στήλες 2,4,6 αντίστοιχα. Οι δεσμευμένες μεταβλητές είναι οι x_2, x_4, x_6 και οι ελεύθερες οι x_1, x_3, x_5 . Κάντε την ανάδρομη αντικατάσταση.

Άσκηση 1.4 Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το παρακάτω σύστημα έχει λύση. Για τις τιμές αυτές λύστε το σύστημα.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 5x + 6y - \lambda z = 1 \\ x + 2y + \lambda z = \lambda \end{array} \right\}$$

Άσκηση 1.5 Βρείτε για ποιές τιμές των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}$, καθένα από τα παρακάτω συστήματα: (i) δεν έχει λύση, (ii) έχει άπειρες λύσεις, (iii) έχει μοναδική λύση. Λύστε το σύστημα στις δύο τελευταίες περιπτώσεις.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ ax + z = b \\ x + y + 2z = 3 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a \\ x - y = 0 \\ 3x + y + bz = 0 \end{array} \right\}$$

Απάντηση: Θα λύσουμε το πρώτο σύστημα. Γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - ar_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1-a & b-a \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - ar_1} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1-a & b-a \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1-a & b-a \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - \frac{a}{2}r_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{3a}{2} & b - 2a \end{array} \right) \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τα a, b .

- Αν $a \neq 2/3$, τότε κάθε στήλη έχει οδηγό, οπότε έχουμε μοναδική λύση, την οποία υπολογίζουμε με ανάδρομη αντικατάσταση.
- Αν $a = 2/3$ και $b \neq 4/3$, το σύστημα είναι αδύνατο: η τρίτη γραμμή είναι μηδενική με δεύτερο μέλος διάφορο του μηδενός.
- Αν $a = 2/3$ και $b = 4/3$, η τελευταία γραμμή είναι μηδενική, όπως και το δεύτερο μέλος. Κάνουμε ανάδρομη αντικατάσταση και παίρνουμε άπειρες λύσεις, με μία ελεύθερη μεταβλητή, τη x_3 .

Άσκηση 1.6 Βρείτε ποιά σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει λύση.

$$\left\{ \begin{array}{rrcr} x & & -z & = a \\ -x & + & y & = b \\ -2x & + & y & + z = c \end{array} \right\}$$

Απάντηση: Κάνουμε απαλοιφή Gauss.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ -1 & 1 & 0 & b \\ -2 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & a+b \\ -2 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + 2r_1} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & a+b \\ 0 & 1 & -1 & 2a+c \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array} \right) \end{aligned}$$

Η τελευταία γραμμή είναι μηδενική.

- Αν $c \neq b - a$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $c = b - a$ τότε το σύστημα έχει δύο οδηγούς στις στήλες 1 και 2. Οι μεταβλητές x, y είναι δεσμευμένες και η z είναι ελεύθερη. Κάνουμε ανάδρομη αντικατάσταση και έχουμε

$$\begin{aligned} x &= a + z \\ y &= a + b + z \end{aligned}$$

Το σύνολο λύσεων είναι το

$$\{(a+z, a+b+z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{(a, a+b, 0) + z(1, 1, 1) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Άσκηση 1.7 Δίνεται το γραμμικό σύστημα Σ_1 : $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = b_i$, για $1 \leq i \leq m$ (για κάθε τιμή του i έχουμε μία εξίσωση). Σταθεροποιήστε δύο δείκτες $1 \leq i_1, i_2 \leq m$ και θεωρήστε το σύστημα Σ_2 που προκύπτει από το Σ_1 εάν αντικαταστήσουμε την εξίσωση i_2 με το άθροισμα της εξίσωσης i_2 σύν λ φορές την εξίσωση i_1 . Δηλαδή η i_2 εξίσωση του Σ_2 είναι η $\sum_{j=1}^n (a_{i_2,j} + \lambda a_{i_1,j})x_j = b_{i_2} + \lambda b_{i_1}$. Δείξτε ότι η n -άδα $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ είναι λύση του Σ_1 αν και μόνο αν είναι λύση του συστήματος Σ_2 .

Απάντηση: Αρχικά παρατηρούμε ότι τα δύο συστήματα έχουν τις εξισώσεις $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = b_i$, για $1 \leq i \leq m$, $i \neq i_2$ κοινές. Ας υποθέσουμε ότι $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ είναι μία λύση του Σ_1 . Τότε ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του Σ_1 , άρα και τις εξισώσεις i_1 και i_2 . Οπότε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_{i_1,j}\theta_j &= b_{i_1} \\ \sum_{j=1}^n a_{i_2,j}\theta_j &= b_{i_2}\end{aligned}$$

οπότε

$$\lambda \sum_{j=1}^n a_{i_1,j}\theta_j + \sum_{j=1}^n a_{i_2,j}\theta_j = \lambda b_{i_1} + b_{i_2} \implies \sum_{j=1}^n (\lambda a_{i_1,j} + a_{i_2,j})\theta_j = \lambda b_{i_1} + b_{i_2}.$$

Άρα το $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ ικανοποιεί και την εξίσωση i_2 του Σ_2 .

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ είναι λύση του Σ_2 . Τότε είναι λύση των εξισώσεων $1 \leq i \leq m$, $i \neq i_2$ και του Σ_1 (αφού είναι κοινές με το Σ_2). Επίσης, αφού είναι λύση του Σ_2 έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n (\lambda a_{i_1,j} + a_{i_2,j})\theta_j &= \lambda b_{i_1} + b_{i_2} \\ \sum_{j=1}^n a_{i_1,j}\theta_j &= b_{i_1}\end{aligned}$$

οπότε

$$\sum_{j=1}^n (\lambda a_{i_1,j} + a_{i_2,j})\theta_j - \lambda \sum_{j=1}^n a_{i_1,j}\theta_j = \lambda b_{i_1} + b_{i_2} - \lambda b_{i_1} \implies \sum_{j=1}^n \lambda a_{i_2,j}\theta_j = b_{i_2}.$$

Άρα το $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ ικανοποιεί και την εξίσωση i_2 του συστήματος Σ_1 .