

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 10

Άσκηση 10.1 Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του $u = (6, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ ως προς την βάση $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 0, 0)\}$.

Άσκηση 10.2 Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του πολωνύμου $p(x) = 3x^2 - 6x - 2$ ως προς την βάση $\mathcal{B} = \{x^2, x - 1, 2x\}$ του $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Άσκηση 10.3 Δείξτε ότι η απεικόνιση $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}, f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$ είναι ένας επιμορφισμός διανυσματικών χώρων.

Άσκηση 10.4 Έστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Βρείτε ισομορφισμούς $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, V)$ και $g \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^2)$.

Άσκηση 10.5 Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος ισομορφισμοί $f : \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Άσκηση 10.6 Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και $L \in \mathcal{L}(V, W)$ τέτοια ώστε $\text{Im } L \cong \ker L$. Δείξτε ότι $\dim V$ άρτιος.

Άσκηση 10.7 Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης n , και γραμμικές απεικονίσεις $L, M \in \mathcal{L}(V, V)$, με τάξεις r_L και r_M αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $L \circ M = 0$ και $L + M$ ισομορφισμός. Δείξτε ότι $r_L + r_M = n$.

Άσκηση 10.8 Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους U, V, W και γραμμικές απεικονίσεις $L \in \mathcal{L}(U, W), M \in \mathcal{L}(U, V)$, τέτοιες ώστε $\ker M \subseteq \ker L$. Δείξτε ότι υπάρχει $N \in \mathcal{L}(V, W)$, τέτοια ώστε $L = N \circ M$.