

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 9

Άσκηση 9.1 Δείξτε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πολλαπλασιασμός με ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ δηλαδή ότι υπάρχει κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $L(x) = ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 9.2 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές και (αν είναι) βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα τους.

- a. $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y) = (2x + 3y, x)$.
- b. $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, L(x, y) = (y, x + y + 1)$.

Άσκηση 9.3 Δείξτε ότι δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε

$$\ker L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4 = x_5\}.$$

Άσκηση 9.4 Έστω X διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και V ένας υπόχωρός του. Δείξτε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $L : V \rightarrow Y$, μπορεί να επεκταθεί σε γραμμική απεικόνιση $\tilde{L} : X \rightarrow Y$, δηλαδή υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\tilde{L}$ τέτοια ώστε $\tilde{L}(u) = L(u)$ για κάθε $u \in V$.

Άσκηση 9.5 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, L(x, y, z, t) = (x + y, y - z, x + z)$. Δείξτε ότι η L είναι γραμμική, βρείτε βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα της και υπολογίστε την τάξη της.

Άσκηση 9.6 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_5, x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5, -2x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5).$$

Βρείτε έναν πίνακα τέτοιο ώστε $L(x) = Ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^5$.

Άσκηση 9.7 Έστω διανυσματικός χώρος V και δύο συμπληρωματικοί υπόχωροι του X και Y . Αν $v \in V$ και $v = x + y$, με $x \in X, y \in Y$, ορίζουμε την προβολή του V στον X παράλληλα στον Y ως $P : V \rightarrow V$ με $P(v) = x$. Δείξτε ότι η P είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση και ότι $P^2 = P$.

Άσκηση 9.8 Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και V_0 ένας υπόχωρός του. Να δείξετε ότι:

- a. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow V$, με $\ker f = V_0$.
- b. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : V \rightarrow V$, με $\operatorname{Im} g = V_0$.

Άσκηση 9.9 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $f : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f^2 = f$. Να δείξετε ότι $V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.