

MEM 112 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Άσκηση 6.1 Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα, εξετάστε εάν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Εάν δεν είναι, δώστε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης.

- a. $\{(1, -1, 0), (-1, 1, 1), (1, -1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
- b. $\{(1, -1, 0), (-1, 1, 1), (1, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
- c. $\{1 + x, x + x^2, 1 + x + x^2\} \subseteq \mathbb{R}[x]$,
- d. $\{\sin, \cos\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Άσκηση 6.2 Βρείτε ένα πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος, $\mathcal{N}(A)$, να περιέχει τα διανύσματα $(-1, 2, 1, 0)$ και $(1, -1, 0, 1)$ και ο χώρος στηλών του, $\mathcal{R}(A)$, να περιέχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Άσκηση 6.3 Δίνονται τα διανύσματα $x = (2, 3, 5)$, $y = (1, 1, 2)$ και $v = (a, b, c)$. Βρείτε μια αναγκαία συνθήκη στα a, b, c ώστε να είναι το σύνολο $\{x, y, v\}$ γραμμικά εξαρτημένο. Κατόπιν βρείτε ένα διάνυσμα z ώστε το σύνολο $\{x, y, z\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Άσκηση 6.4 Δείξτε ότι αν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση 6.5 Δείξτε ότι $\langle (1, -1, 0), (-1, 1, 1) \rangle = \langle (-1, 1, 3), (0, 0, 1) \rangle$.

Άσκηση 6.6 Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Εάν $m < n$, δείξτε ότι οποιαδήποτε n διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Άσκηση 6.7 Δείξτε ότι ο πίνακας $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν έχει τάξη n .

Άσκηση 6.8 Έστω $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αν και μόνο αν ο πίνακας $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ με στήλες τα $v_1, \dots, v_n$ είναι αντιστρέψιμος.