

MEM 102 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Άσκηση 5.1 Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του αντίστοιχου διανυσματικού χώρου.

- a. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\}$,
- b. $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
- c. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$,
- d. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0\}$,
- e. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$,
- f. $\{x(1, 2^2, 0) + y(1, 2, 3) : x, y \in \mathbb{R}\}$,
- g. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$,
- h. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$.

Άσκηση 5.2 Έστω V διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$. Δείξτε ότι ο U είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν $U = \langle U \rangle$.

Άσκηση 5.3 Εξετάστε ποιά από τα διανύσματα $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, 1, -1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$ ανήκουν στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ που παράγουν τα διανύσματα $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1, 1)$. Για όποιο διάνυσμα ανήκει, γράψτε το ως γραμμικό συνδυασμό των v_1, v_2, v_3 .

Άσκηση 5.4 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Εξετάστε εάν το διάνυσμα $(1, -2, -1)$ ανήκει στο χώρο, $\mathcal{R}(A)$, που παράγουν οι στήλες του A . Βρείτε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ το οποίο δεν ανήκει στο χώρο στηλών του A .

Άσκηση 5.5 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ τα οποία παράγουν το χώρο, $\mathcal{N}(A)$, των λύσεων του συστήματος $Ax = 0$.

Άσκηση 5.6 Έστω $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, -1)$, $v_3 = (3, 1, 1)$. Δείξτε ότι $(a, b, c) \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ αν και μόνο αν $b = c$. Γράψτε το διάνυσμα $(1, 3, 3)$ με δύο τρόπους ως γραμμικό συνδυασμό των v_1, v_2, v_3 .

Άσκηση 5.7 Δείξτε ότι δεν υπάρχουν διανύσματα $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^3$. Γενικεύστε το επιχείρημα σας για διανύσματα $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

Άσκηση 5.8 Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}(A)$ το χώρο λύσεων του συστήματος $Ax = 0$ και με $\mathcal{R}(B)$ το χώρο που παράγουν οι στήλες του B .

a. Δείξτε ότι

$$AB = O \iff \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{N}(A).$$

b. Εάν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

βρείτε μη μηδενικό 3×3 πίνακα B τέτοιο ώστε $AB = O$.

Άσκηση 5.9 Έστω $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathbb{R}^n$. Έστω $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$. Θα δείξουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος.

a. Δείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ τέτοιοι ώστε $e_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i$, για κάθε $1 \leq j \leq n$.

b. Δείξτε ότι

$$B \cdot \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = e_j, \quad \text{για κάθε } 1 \leq j \leq n.$$

c. Δείξτε ότι ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφό του.