Κεφάλαιο 4

Νέοι Διανυσματικοί Χώροι

Το κύριο χαρακτηριστικό της Γραμμικής Άλγεβρας είναι η δυνατότητα να ενοποιεί σε μία θεωρία πολλά διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα. Ήδη έχουμε δει παραδείγματα διανυσματικών χώρων στη Γεωμετρία, στη θεωρία των πολυωνύμων, των πινάκων, των συναρτήσεων πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, και άλλα. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα διευρύνουμε περισσότερο το πεδίο της Γραμμικής Άλγεβρας και θα εξετάσουμε διανυσματικούς χώρους πάνω από πιο γενικά σύνολα αριθμών. Επίσης θα μελετήσουμε διαδικασίες με τις οποίες κατασκευάζουμε νέους διανυσματικούς χώρους.

4.1 Αλγεβρικά σώματα

Ποιές ιδιότητες των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιήσαμε για να αναπτύξουμε τη θεωρία των διανυσματικών χώρων μέχρι τώρα; Χρειάζεται να μπορούμε να προσθέτουμε και να αφαιρούμε τους συντελεστές σε ένα γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων, να τους πολλαπλασιάζουμε, και να μπορούμε να τους διαιρούμε με ένα μη μηδενικό αριθμό[1]. Υπάρχουν άλλα σύνολα αριθμών, εκτός από τους πραγματικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς, που έχουν αυτές τις ιδιότητες;

Στο σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q}$, ορίζονται οι πράξεις και έχουν όλες τις ιδιότητες που χρησιμοποιήσαμε. Μπορούμε, για παράδειγμα, να εφαρμόσουμε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss σε έναν πίνακα με ρητούς αριθμούς, και το αποτέλεσμα θα είναι πίνακας με ρητούς αριθμούς.

Αυτό δεν ισχύει στο σύνολο των ακεραίων αριθμών, $\mathbb{Z}$. Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με οποιονδήποτε μη μηδενικό ακέραιο και να παραμείνουμε στο σύνολο των ακεραίων.

Ένα σύνολο με δύο πράξεις που έχουν τις βασικές ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που χρειαζόμαστε στη μελέτη διανυσματικών χώρων, είναι ένα *αλγεβρικό σώμα*

[1] Η μόνη περίπτωση που χρησιμοποιήσαμε άλλες ιδιότητες των αριθμών, ήταν στην εύρεση των ιδιοτιμών ενός γραμμικού τελεστή, που χρειάστηκε να βρούμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου

Ορισμός 4.1. Ένα **αλγεβρικό σώμα** είναι ένα σύνολο $\mathbb{K}$ στο οποίο ορίζονται δύο διμελείς πράξεις, τις οποίες ονομάζουμε **πρόσθεση** και **πολλαπλασιασμό**,

$$(a, b) \mapsto a + b \quad \text{και} \quad (a, b) \mapsto ab$$

και οι οποίες ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα.

ΑΣ1. Η προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b, c \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad (ab)c = a(bc)$$

ΑΣ2. Η αντιμεταθετική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$a + b = b + a \quad , \quad ab = ba$$

ΑΣ3. Η επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης ως προς τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b, c \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$a(b + c) = ab + ac$$

ΑΣ4. Υπάρχουν στοιχεία $0 \in \mathbb{K}$ και $1 \in \mathbb{K}$, τέτοια ώστε για κάθε $a \in \mathbb{K}$,

$$a + 0 = a \quad \text{και} \quad a1 = a$$

ΑΣ5. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $a + b = 0$. Το μοναδικό στοιχείο b με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται $-a$ και ονομάζεται *αντίθετο* του a.

ΑΣ6. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $ab = 1$. Το μοναδικό στοιχείο b με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται a^{-1} και ονομάζεται *αντίστροφο* του a.

Παράδειγμα 4.1 Οι ρητοί αριθμοί, $\mathbb{Q}$, οι πραγματικοί αριθμοί, $\mathbb{R}$, και οι μιγαδικοί αριθμοί, $\mathbb{C}$, με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αποτελούν αλγεβρικά σώματα. Οι ακέραιοι αριθμοί, $\mathbb{Z}$, δεν αποτελούν σώμα καθώς δεν ικανοποιείται το αξίωμα (ΑΣ6).

Παράδειγμα 4.2 Το σύνολο $\mathbb{Z}_3$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 3 με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό modulo 3 (δες Θεμέλια των Μαθηματικών, Κεφάλαιο 2), αποτελεί ένα σώμα. Τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_3$ είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης ισοτιμίας modulo 3 στο $\mathbb{Z}$:

$$m \equiv_3 n \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad m - n \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3\,.$$

Θα συμβολίσουμε n_3 την κλάση υπολοίπων του n. Αυτή η σχέση διαμερίζει το σύνολο των ακεραίων σε 3 κλάσεις, 0_3, 1_3, 2_3. Ορίζουμε πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathbb{Z}_3$ ως εξής:

$$m_3 + n_3 = (m+n)_3 \quad (4.1)$$
$$m_3 n_3 = (mn)_3 \quad (4.2)$$

Για παράδειγμα, $1_3 + 2_3 = 3_3 = 0_3$, $2_3 2_3 = 4_3 = 1_3$.

Γενικότερα, για κάθε πρώτο αριθμό p, το σύνολο $\mathbb{Z}_p$ των κλάσεων υπολοίπων modulo p αποτελεί ένα σώμα.

> **Δραστηριότητα 4.1** Εξετάστε εάν το στοιχείο 3_6 στο σύνολο $\mathbb{Z}_6$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 6, έχει αντίστροφο. Είναι το $\mathbb{Z}_6$ αλγεβρικό σώμα;

Παράδειγμα 4.3 Το σύνολο των ρητών αριθμών επεκτεταμένο με την τετραγωνική ρίζα του 2, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, αποτελεί ένα σώμα. Ορίζουμε τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ακριβώς όπως στους πραγματικούς αριθμούς. Το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι κλειστό ως προς αυτές τις πράξεις, και έτσι έχουμε καλά ορισμένες πράξεις στο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\,.\end{aligned}$$

> **Δραστηριότητα 4.2** Βρείτε το αντίστροφο του $a + b\sqrt{2}$ όταν $b \neq 0$ και δείξτε οτι ανήκει στο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα μπορούμε να αποδείξουμε άλλες ιδιότητες που έχει κάθε αλγεβρικό σώμα, όπως

1. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $0a = a0 = 0$.
2. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ ισχύει $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

Μία σημαντική ιδιότητα που απορρέει από τα αξιώματα ενός σώματος, και συνεπώς ισχύει σε κάθε σώμα, ενώ μπορεί να μην ισχύει σε άλλες αλγεβρικές δομές, είναι η *ιδιότητα της διαγραφής*.

> **Λήμμα 4.1** *Σε ένα σώμα $\mathbb{K}$, ισχύουν τα ακόλουθα:*
>
> *1. Εάν $a, b \in \mathbb{K}$ και $ab = 0$, τότε είτε $a = 0$ είτε $b = 0$.*
>
> *2. Εάν $a, b, c \in \mathbb{K}$ και $c \neq 0$, τότε $ac = bc$ συνεπάγεται $a = b$.*

Απόδειξη. α′. Έστω $ab = 0$ και $a \neq 0$. Τότε, από τα αξιώματα (ΑΣ6) και (ΑΣ1), έχουμε $a^{-1}(ab) = (aa^{-1})b = 1b = b$. Αλλά αφού $ab = 0$, έχουμε $a^{-1}(ab) = a0 = 0$. Άρα $b = 0$.
β′. Εάν $ac = bc$ τότε $ac + (-b)c = 0$, άρα $(a + (-b))c = 0$. Αφού $c \neq 0$, από το α′ έχουμε $a + (-b) = 0$, συνεπώς $a = b$.

□

Αλγεβρικά σώματα θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά στο μάθημα ‘‘Άλγεβρα Ι’’.

4.2 Αξιώματα Διανυσματικού Χώρου

Θα ορίσουμε ένα διανυσματικό χώρο πάνω από ένα αλγεβρικό σώμα, ως ένα σύνολο με δύο πράξεις, που ικανοποιούν τα κατάλληλα αξιώματα.

Ορισμός 4.2. Θεωρούμε ένα αλγεβρικό σώμα $\mathbb{K}$ και ένα σύνολο V με δύο πράξεις, την πρόσθεση διανυσμάτων,

$$\alpha : V \times V \longrightarrow V \qquad \alpha(v,\, w) = v \dot{+} w$$

και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό από το σώμα $\mathbb{K}$,

$$\mu : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \qquad \mu(a,\, v) = a \cdot v\,.$$

Το σύνολο V με τις πράξεις α και μ, ονομάζεται **διανυσματικός χώρος πάνω από το** $\mathbb{K}$ εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα.

ΔΧ1. Για κάθε $v,\, w \in V, \quad v \dot{+} w = w \dot{+} v$.

ΔΧ2. Για κάθε $v,\, w,\, u \in V, \quad (v \dot{+} w) \dot{+} u = v \dot{+} (w \dot{+} u)$.

ΔΧ3. Υπάρχει στοιχείο $\bar{0} \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in V, \quad v \dot{+} \bar{0} = v$.

ΔΧ4. Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε $u \dot{+} w = \bar{0}$.

ΔΧ5. Για κάθε $a,\, b \in \mathbb{K}$ και $v \in V, \quad a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$.

ΔΧ6. Για κάθε $v \in V$ ισχύει $1 \cdot v = v$.

ΔΧ7. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και $v,\, w \in V, \quad a \cdot (v \dot{+} w) = a \cdot v \dot{+} a \cdot w$.

ΔΧ8. Για κάθε $a,\, b \in \mathbb{K}$ και $v, \in V, \quad (a + b) \cdot v = a \cdot v \dot{+} b \cdot v$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται **διανύσματα**.

Παρατήρηση: Στη διατύπωση των αξιωμάτων χρησιμοποιούμε το σύμβολο $+$ για την πρόσθεση στο σώμα των αριθμών, και το σύμβολο $\dot{+}$ για την πρόσθεση διανυσμάτων. Αργότερα δεν θα κάνουμε αυτή τη διάκριση, καθώς θα είναι σαφές από τα συμφραζόμενα σε ποιά πράξη αναφερόμαστε. Επίσης, εάν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο 0 είτε για τον αριθμό μηδέν στο σώμα, είτε για το μηδενικό διάνυσμα.

4.3 Πρώτα αποτελέσματα από τα αξιώματα.

Το μηδενικό διάνυσμα ενός χώρου είναι μοναδικό, όπως βλέπουμε εάν υποθέσουμε οτι $\tilde{0}$ είναι ένα στοιχείο με την ιδιότητα (ΔΧ3). Τότε $\tilde{0} = \bar{0} \dot{+} \tilde{0} = \bar{0}$.

Λήμμα 4.2 *Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, με πράξεις $\dot{+}$ και $\cdot$.*

1. *Το γινόμενο ενός αριθμού $a \in \mathbb{K}$, και ενός διανύσματος $v \in V$, είναι το μηδενικό διάνυσμα εάν και μόνον εάν $a = 0$ ή $v = 0$.*

   Πιο αναλυτικά, για κάθε $v \in V$, $0 \cdot v = \bar{0}$, και για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$, και αντίστροφα, για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και για κάθε $v \in V$, εάν $a \cdot v = \bar{0}$, τότε είτε $a = 0$ ή $v = \bar{0}$.

2. *Το αντίθετο ενός διανύσματος $v \in V$ είναι μοναδικό, και ίσο με $(-1) \cdot v$.*

Απόδειξη. Για το 1, θεωρούμε ένα διάνυσμα $v \in V$, και τον αριθμό μηδέν, $0 \in \mathbb{K}$. Θα δείξουμε οτι $0 \cdot v = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (0+0) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v \end{aligned}$$

Έστω w ένα αντίθετο του διανύσματος $0 \cdot v$, δηλαδή $0 \cdot v \dot{+} w = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 \cdot v \dot{+} w \\ &= (0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v) \dot{+} w \\ &= 0 \cdot v \dot{+} (0 \cdot v \dot{+} w) \\ &= 0 \cdot v \dot{+} \bar{0} \\ &= 0 \cdot v \end{aligned}$$

Θεωρούμε έναν αριθμό $a \in \mathbb{K}$, και το μηδενικό διάνυσμα $\bar{0} \in V$. Θα δείξουμε οτι $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{0} &= a \cdot (\bar{0} \dot{+} \bar{0}) \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Έστω u ένα αντίθετο του διανύσματος $a \cdot \bar{0}$, δηλαδή $a \cdot \bar{0} \dot{+} u = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= a \cdot \bar{0} \dot{+} u \\ &= (a \cdot \bar{0} \dot{+} a \cdot \bar{0}) \dot{+} u \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} (a \cdot \bar{0} \dot{+} u) \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} \bar{0} \\ &= a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Αντίστροφα, εάν $a \neq 0$ και $a \cdot v = \bar{0}$, τότε

$$v = 1 \cdot v = (a^{-1}a) \cdot v = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = a^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}\,.$$

Για το 2, υποθέτουμε οτι w και w' είναι αντίθετα του $v \in V$, και θα δείξουμε οτι $w = w'$. Έχουμε οτι $v \dotplus w = \bar{0} = v \dotplus w'$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} w &= w \dotplus \bar{0} \\ &= w \dotplus (v \dotplus w') \\ &= (w \dotplus v) \dotplus w' \\ &= (v \dotplus w) \dotplus w' \\ &= \bar{0} \dotplus w' \\ &= w' \dotplus \bar{0} \\ &= w' \end{aligned}$$

Τώρα δείχνουμε οτι το γινόμενο $(-1) \cdot v$ είναι αντίθετο του v:

$$\begin{aligned} v \dotplus ((-1) \cdot v) &= (1 \cdot v) \dotplus ((-1) \cdot v) \\ &= (1 + (-1)) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

Το μοναδικό αντίθετο του v συμβολίζουμε $-v$.

□

4.4 Παραδείγματα διανυσματικών χώρων πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Στην ''Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα'' έχουμε δει πολλά παραδείγματα διανυσματικών χώρων πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς. Αντίστοιχους διανυσματικούς χώρους μπορούμε να ορίσουμε πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς.

1. Τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$, των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών.

2. Τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, των ακολουθιών με όρους πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς, και τους διανυσματικούς υποχώρους αυτών, όπως το χώρο των φραγμένων ακολουθιών, ή των συγκλινουσών ακολουθιών.

3. Τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}[x]$ και $\mathbb{C}[x]$, των πολυωνύμων μίας μεταβλητής με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές, όπως και τους υποχώρους $\mathbb{R}_k[x]$ και $\mathbb{C}_k[x]$ των πολυωνύμων βαθμού ίσου ή μικρότερου από k.

4. Τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^X$ και $\mathbb{C}^X$, των συναρτήσεων από ένα σύνολο X στους πραγματικούς ή τους μιγαδικούς αριθμούς.

5. Τους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ και $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{C})$, των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία στους πραγματικούς ή τους μιγαδικούς αριθμούς.

Αυτά τα παραδείγματα εύκολα γενικεύονται σε διανυσματικούς χώρους πάνω από άλλο αλγεβρικό σώμα.

Παράδειγμα 4.4 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{Z}_3^n$, των διατεταγμένων n-άδων στοιχείων του $\mathbb{Z}_3$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{Z}_3$. Για παράδειγμα, ο χώρος $\mathbb{Z}_3^2$ αποτελείται από τα 9 διατεταγμένα ζεύγη (m_3, k_3).

Το σύνολο των σημείων (m_3, k_3) του $\mathbb{Z}_3^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $m_3 + k_3 = 0_3$ είναι $\{(0_3, 0_3), (1_3, 2_3), (2_3, 1_3)\}$. Αυτά τα τρία σημεία αποτελούν έναν υπόχωρο του $\mathbb{Z}_3^2$, μία ''ευθεία'' στο ''επίπεδο'' $\mathbb{Z}_3^2$.

Το σύνολο $\{(1_3, 2_3), (2_3, 1_3)\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, αφού $(2_3, 1_3) = 2_3(1_3, 2_3)$.

Το σύνολο $\{(0_3, 2_3), (1_3, 1_3)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αφού μπορούμε να ελέγξουμε οτι κανένα από τα πολλαπλάσια του $(1_3, 1_3)$ με στοιχεία του $\mathbb{Z}_3$ δεν είναι ίσο με το $(0_3, 2_3)$.

Παράδειγμα 4.5 Μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών ως διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$, με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης δύο πραγματικών αριθμών και του πολλαπλασιασμού ενός πραγματικού αριθμού με ένα ρητό. Θα χρησιμοποιήσουμε τα γράμματα x, y για τα στοχεία του $\mathbb{R}$, που τα θεωρούμε τα διανύσματα, και τα γράμματα p, q για τα στοιχεία του $\mathbb{Q}$ όταν τα θεωρούμε τους αριθμούς.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το σύνολο όλων των πολλαπλασίων του x με ένα ρητό αριθμό, αποτελεί έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}$, $U = \{px : p \in \mathbb{Q}\}$. Εάν $x \neq 0$, τότε ο υπόχωρος U έχει διάσταση 1.

Εάν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και x/y δεν είναι ρητός, το σύνολο $V = \{px + qy : p, q \in \mathbb{Q}\}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}$, διάστασης 2. Τα x και y είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$, αφού δεν υπάρχουν p και q, όχι και τα δύο ίσα με το μηδέν, τέτοια ώστε $px + qy = 0$.

Παράδειγμα 4.6 Όπως το $\mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 1 πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών, το $\mathbb{C}$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 1 πάνω από το σώμα των μιγαδικών. Όμως μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών ως διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών, με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης δύο μιγαδικών αριθμών και του πολλαπλασιασμού ενός μιγαδικού αριθμού με έναν πραγματικό.

4.5 Γραμμικές απεικονίσεις

Η έννοια της γραμμικής απεικόνισης γενικεύεται σε Η έννοια της γραμμικής απεικόνισης εξαρτάται από το σώμα πάνω από το οποίο είναι ορισμένος ένας διανυσματικός χώρος: για να είναι η $L : V \longrightarrow W$ γραμμική, πρέπει να ισχύει $L(av) = aL(v)$ *για κάθε* $a \in \mathbb{K}$. Εάν θεωρήσουμε ένα σώμα $\mathbb{K}'$ που περιέχει το $\mathbb{K}$, αυξάνονται οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι μία απεικόνιση γραμμική.

Παράδειγμα 4.7 Η απεικόνιση $z \mapsto \bar{z}$ είναι γραμμική απεικόνιση εάν θεωρήσουμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς: $\overline{az} = a\bar{z}$ όταν a είναι πραγματικός αριθμός. Αλλά εάν $\operatorname{Im} a \neq 0$, τότε $\overline{az} \neq a\bar{z}$. Συνεπώς η απεικόνιση δεν είναι γραμμική εάν θεωρήσουμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς.

4.6 Εικόνα και αντίστροφη εικόνα. Αριστερό και δεξιό αντίστροφο.

Πρόταση 4.3 *Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A, και την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

1. *Εάν V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε η εικόνα του V μέσω της απεικόνισης T_A, $T_A(V) = \{T_A(v) \mid v \in V\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.*

2. *Εάν W είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, τότε η αντίστροφη εικόνα του W μέσω της απεικόνισης T_A, $T_A^{-1}(W) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid T_A(v) \in W\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το 1, θεωρούμε w_1, $w_2 \in T_A(V)$ και $c \in \mathbb{R}$, και πρέπει να δείξουμε οτι $w_1 + w_2$ και $cw_1 \in T_A(V)$. Εφόσον $w_1 \in T_A(V)$, υπάρχει $v_1 \in V$ τέτοιο ώστε $T_A(v_1) = w_1$, και ανάλογα για το w_2. Εφόσον V είναι διανυσματικός υπόχωρος, $v_1 + v_2 \in V$ και $T_A(v_1 + v_2) = T_A(v_1) + T_A(v_2) = w_1 + w_2$, άρα $w_1 + w_2 \in T_A(V)$. Παρόμοια $cv_1 \in V$ και $T_A(cv_1) = cT_A(v_1) = cw_1$. Αρα $cw_1 \in T_A(V)$.

Για το 2, θεωρούμε v_1, $v_2 \in T_A^{-1}(W)$ και $c \in \mathbb{R}$, και πρέπει να δείξουμε οτι $v_1 + v_2$ και $cv_1 \in T_A^{-1}(W)$. Υπάρχουν $w_1 \in W$ τέτοιο ώστε $T_A(v_1) = w_1$, και ανάλογα για το w_2. Αλλά τότε $T_A(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 \in W$, και $T_A(cv_1) = cw_1 \in W$, άρα $v_1 + v_2$ και cv_1 ανήκουν στο $T_A^{-1}(W)$.

□

Το επόμενο ερώτημα που θέλουμε να εξετάσουμε είναι υπό ποίες συνθήκες είναι η απεικόνιση T_A ενεικονική, επεικονική ή αμφιμονοσήμαντη.

Η T_A είναι ενεικονική εάν για κάθε v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^n$, η υπόθεση $T_A(v_1) = T_A(v_2)$ συνεπάγεται οτι $v_1 = v_2$. Αυτό ισχύει εάν και μόνον εάν ισχύει η συνεπαγωγή $Av_1 = Av_2 \Rightarrow v_1 = v_2$, ή ισοδύναμα εάν $A(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0$. Δηλαδή η T_A είναι ενεικονική, εάν και μόνον εάν, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, δηλαδή εάν και μόνον εάν η μοναδική λύση της εξίσωσης $Ax = 0$ είναι η τετριμμένη, $x = 0$. Αλλά γνωρίζουμε οτι η ομογενής εξίσωση έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, ακριβώς όταν δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, δηλαδή όταν η τάξη του πίνακα είναι $r = n$.

Η T_A είναι επεικονική εάν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$, υπάρχει $v \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $T_A(v) = b$, δηλαδή όταν η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$. Αυτό ισχύει ακριβώς όταν ο χώρος στηλών του A είναι όλος ο $\mathbb{R}^m$, δηλαδή όταν η τάξη του πίνακα είναι $r = m$.

Εχουμε αποδείξει την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 4.4 *Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, τότε η απεικόνιση T_A είναι*

1. *ενεικονική, εάν και μόνον εάν $r = n$, δηλαδή όταν $\mathcal{N}(A) = \{0\}$,*

2. *επεικονική, εάν και μόνον εάν $r = m$, δηλαδή όταν $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$, και*

3. *αμφιμονοσήμαντη εάν και μόνον εάν $r = m = n$.*

□

Μία απεικόνιση $f : N \to M$ έχει **αριστερό αντίστροφο** $g : M \to N$, τέτοιο ώστε $g \circ f = \mathbf{I}_N$, εάν και μόνον εάν η f είναι ενεικονική, και έχει **δεξιό αντίστροφο** $h : M \to N$, τέτοιο ώστε $f \circ h = \mathbf{I}_M$, εάν και μόνον εάν η f είναι επεικονική, (δες σημειώσεις του μαθήματος Θεμέλια των Μαθηματικών).

Ορισμός 4.3. Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας,

1. ο $n \times m$ πίνακας B είναι **αριστερός αντίστροφος** του A, εάν $BA = I_n$.

2. ο $n \times m$ πίνακας C είναι **δεξιός αντίστροφος** του A, εάν $AC = I_m$.

Πρόταση 4.5 *Ο $m \times n$ πίνακας A, έχει*

1. *αριστερό αντίστροφο εάν και μόνον εάν η τάξη $r = n \leq m$.*

2. *δεξιό αντίστροφο εάν και μόνον εάν η τάξη $r = m \leq n$.*

Απόδειξη. Πολλαπλασιασμός με τον αριστερό ή το δεξιό αντίστροφο πίνακα, ορίζει το αριστερό ή το δεξιό αντίστροφο της συνάρτησης T_A, αντίστοιχα. Από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε οτι η συνθήκη $r = n$ ή $r = m$ είναι αναγκαία. Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη βρίσκοντας συγκεκριμένο αριστερό ή δεξιό αντίστροφο όταν ικανοποιείται η αντίστοιχη συνθήκη.

Εάν η τάξη του $m \times n$ πίνακα A είναι $r = n$, τότε οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και από το Λήμμα 1.7, το ίδιο ισχύει για τις στήλες του τετραγωνικού πίνακα A^TA. Άρα ο A^TA είναι αντιστρέψιμος. Θέτουμε $B = (A^TA)^{-1}A^T$, και έχουμε $BA = \left[(A^TA)^{-1}A^T\right]A = (A^TA)^{-1}(A^TA) = I_n$.

Είναι φανερό οτι εάν η τάξη του A είναι $r = m$, τότε η τάξη του A^T είναι ίση με τον αριθμό των στηλών του, και από το Λήμμα, ο πίνακας $(A^T)^TA^T = AA^T$ είναι αντιστρέψιμος.

Θέτουμε $C = A^T(AA^T)^{-1}$, και έχουμε $AC = A\left[A^T(AA^T)^{-1}\right] = (AA^T)(AA^T)^{-1} = I_m$. □

Στην περίπτωση ενός τετραγωνικού πίνακα A, $m = n$, και τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η τάξη του πίνακα είναι $r = n$.

2. Ο πίνακας A έχει αριστερό αντίστροφο.

3. Ο πίνακας A έχει δεξιό αντίστροφο.

4. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

4.7 Ασκήσεις

Άσκηση 4.1 Εάν $V = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$, βρείτε (μία βάση για) τους διανυσματικούς υπόχωρους $T_A(V)$ και $T_A^{-1}(V)$, για τον πίνακα

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Άσκηση 4.2 Ελέγξτε εάν οι παρακάτω πίνακες έχουν αριστερό ή δεξιό αντίστροφο, και υπολογίστε το

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4.3 Υποθέστε οτι αναζητούμε τον δεξιό αντίστροφο του πίνακα A. Τότε $AB = I$ οδηγεί στην $A^TAB = A^T$ ή $B = (A^TA)^{-1}A^T$. Ο B όμως ικανοποιεί την $BA = I$ και είναι αριστερός αντίστροφος. Ποιό βήμα είναι λάθος στον παραπάνω συλλογισμό;

Άσκηση 4.4 Δείξτε οτι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$\begin{aligned} \varphi(1,\,1,\;\,1) &= (1,\,0,\,1) \\ \varphi(0,\,1,\,-1) &= (2,\,1,\,3) \\ \varphi(1,\,2,\,1) &= (1,\,1,\,2)\,. \end{aligned}$$

1. Βρείτε τον πίνακα A της παραπάνω απεικόνισης.
2. Δείξτε οτι η εικόνα $\varphi(\mathbb{R}^3)$ της φ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.
3. Βρείτε την αντίστροφη εικόνα του $\{0\}$ μέσω της απεικόνισης φ.
4. Βρείτε έναν υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 με την ιδιότητα $\varphi(V) = \varphi(\mathbb{R}^3)$.
5. Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $\varphi(v) = (6,\,-1,\,5)$.
6. Βρείτε έναν υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 με την ιδιότητα ο $\varphi(W)$ να είναι η ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από το διάνυσμα $(6,\,-1,\,5)$.

Άσκηση 4.5 Έστω $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Δείξτε οτι η απεικόνιση είναι επεικονική.
2. Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $T_A(v) = (-2,\,5)$.
3. Βρείτε την αντίστροφη εικόνα του $\{0\}$ μέσω της απεικόνισης T_A.
4. Βρείτε μονόπλευρο αντίστροφο (αριστερό ή δεξιό;) της γραμμικής απεικόνισης T_A.

4.8 Ευθύ Αθροισμα

Στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα είδαμε οτι ο γραμμικός υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V που παράγεται από την ένωση δύο γραμμικών υποχώρων X και Y, είναι το σύνολο όλων των αθροισμάτων ενός διανύσματος στο X και ενός διανύσματος στο Y. Αυτό το γραμμικό υπόχωρο ονομάσαμε *άθροισμα* των X και Y, και τον συμβολίσαμε

$$X + Y = \{x + y : x \in X,\, y \in Y\}\,.$$

Μία περίπτωση αθροίσματος δύο υποχώρων που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι όταν η τομή των X και Y είναι τετριμμένη. Εάν $X \cap Y = \{0\}$, τότε κάθε διάνυσμα $u \in X + Y$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα διανυσμάτων του X και του Y: εάν $x,\, x' \in X$, $y,\, y' \in Y$ και $x + y = x' + y'$, τότε $x = x'$ και $y = y'$. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζουμε το διανυσματικό χώρο $X+Y$ *(εσωτερικό) ευθύ άθροισμα* των X και Y, και το συμβολίζουμε $X \oplus Y$.

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε μία πιο γενική κατασκευή ευθέως αθροίσματος. Ξεκινάμε με δύο διανυσματικούς χώρους V και W, πάνω από το ίδιο σώμα $\mathbb{K}$, και ορίζουμε δομή διανυσματικού χώρου στο καρτεσιανό γινόμενο $V \times W$. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε ένα νέο διανυσματικό χώρο, που περιέχει γραμμικούς υπόχωρους V' και W', ισομορφικούς με τους V και W, και με την ιδιότητα $V' \cap W' = \{0\}$.

Αυτό το νέο διανυσματικό χώρο τον ονομάζουμε *(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα* των V και W, και τον συμβολίζουμε $V \oplus W$. Η χρήση του ίδιου ονόματος και του ίδιου συμβολισμού στις δύο διαφορετικές περιπτώσεις είναι δικαιολογημένη γιατί, όπως θα αποδείξομε, το εξωτερικό ευθύ άθροισμα των διανυσματικών χώρων V και W είναι ισομορφικό με το εσωτερικό ευθύ άθροισμα των υποχώρων V' και W',

$$V \oplus W \cong V' + W' .$$

Ορισμός 4.4. Θεωρούμε V και W διανυσματικούς χώρους πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Στο καρτεσιανό γινόμενο $V \times W = \{(v,\, w) : v \in V,\, w \in W\}$ ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με στοιχεία του $\mathbb{K}$ ως εξής: για $(v,\, w)$, $(x,\, y) \in V \times W$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$(v,\, w) + (x,\, y) = (v + x,\, w + y) \qquad \text{και} \qquad a\,(v,\, w) = (a\,v,\, a\,w) .$$

Με αυτές τις πράξεις το σύνολο $V \times W$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τον οποίο ονομάζουμε **(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα** των V και W, και συμβολίζουμε $V \oplus W$.

Παράδειγμα 4.8 Το ευθύ άθροισμα $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ είναι ο διανυσματικός χώρος που συνήθως συμβολίζουμε $\mathbb{R}^2$. Στοιχεία του είναι τα διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών $(x,\, y)$, και οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα.

Παράδειγμα 4.9 Εάν V και W είναι δύο διαφορετικοί διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, το ευθύ άθροισμα $V \oplus W$ είναι διαφορετικό από το ευθύ άθροισμα $W \oplus V$. Όμως τα δύο αθροίσματα είναι ισομορφικά:

$$V \oplus W \cong W \oplus V .$$

Δραστηριότητα 4.3 Δείξτε οτι η απεικόνιση $(v,\, w) \mapsto (w,\, v)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική, και συνεπώς ορίζει έναν ισομορφισμό $C : V \oplus W \longrightarrow W \oplus V$.

Παράδειγμα 4.10 Εάν U, V και W είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, το ευθύ άθροισμα $(U \oplus V) \oplus W$ και το ευθύ άθροισμα $U \oplus (V \oplus W)$ είναι ισομορφικά:

$$(U \oplus V) \oplus W \cong U \oplus (V \oplus W) .$$

Δραστηριότητα 4.4 Δείξτε οτι η απεικόνιση $((u, v), w)) \mapsto (u, (v, w))$ είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική, και συνεπώς ορίζει έναν ισομορφισμό

$$D : (U \oplus V) \oplus W \longrightarrow U \oplus (V \oplus W)\,.$$

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να ορίσουμε το ευθύ άθροισμα περισσότερων από δύο διανυσματικών χώρων, $V_1, V_2, \ldots, V_k$, ως

$$\bigoplus_{j=1}^{k} V_j = (\cdots((V_1 \oplus V_2) \oplus V_3) \oplus \cdots) \oplus V_k\,,$$

γνωρίζοντας οτι εάν αλλάξουμε τις παρενθέσεις θα έχουμε έναν ισόμορφο διανυσματικό χώρο.

Παράδειγμα 4.11 Συχνά εξετάζουμε έναν $m\times n$ πίνακα ως ένα σύνολο από n στήλες, κάθε μία από τις οποίες είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{K}^n$. Αυτή η προσέγγιση μας οδηγεί να θεωρήσουμε το διανυσματικό χώρο των $m \times n$ πινάκων, $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ ως ισομορφικό με το ευθύ άθροισμα n διανυσματικών χώρων $\mathbb{K}^m$,

$$\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K}) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{K}^m\,.$$

Το ακόλουθο Λήμμα εξηγεί τη σχέση μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού ευθέως αθροίσματος.

Λήμμα 4.6 *Εάν X και Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, και $X \cap Y = \{0\}$, τότε το (εσωτερικό ευθύ) άθροισμα των X και Y είναι ισομορφικό με το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα:*

$$X + Y \cong X \oplus Y\,.$$

Απόδειξη. Εάν $v \in X + Y \subseteq V$, υπάρχουν μοναδικά $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοια ώστε $v = x + y$. Ορίζουμε την απεικόνιση $L : X + Y \longrightarrow X \oplus Y$ με $L(v) = (x, y)$. Από τη μοναδικότητα, η L είναι καλά ορισμένη. Ελέγχουμε οτι είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική. □

Προσέξτε τη διαφορά μεταξύ του ισομορφισμού στο Λήμμα 4.6 και του ισομορφισμού που προκύπτει από την επιλογή μίας βάσης του διανυσματικού χώρου V, $V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$, (''Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα'', Θεώρημα Δομής διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης). Ο ισομορφισμός $X + Y \cong X \oplus Y$ δεν βασίζεται σε κάποια επιλογή: τα x και y είναι μοναδικά καθορισμένα από τα δεδομένα του προβλήματος. Λέμε οτι αυτός είναι ένας **κανονικός ισομορφισμός**, ενώ ο ισομορφισμός $V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$ δεν είναι κανονικός, αφού εξαρτάται από την επιλογή μίας βάσης του V.

Στο ευθύ άθροισμα $V \oplus W$ θεωρούμε τους υπόχωρους $V' = V \times \{0\}$ και $W' = \{0\} \times W$. Οι απεικονίσεις $j_1 : V \longrightarrow V'$, $j_1(v) = (v, 0)$, και $j_2 : W \longrightarrow W'$, $j_2(w) = (0, w)$ είναι ισομορφισμοί. Κάθε διάνυσμα στο $V \oplus W$ γράφεται ως άθροισμα ενός διανύσματος στο V'

και ενός διανύσματος στο W': $(v,\, w) = (v,\, 0) + (0,\, w)$. Οι υπόχωροι V' και W' έχουν τετριμμένη τομή: εάν $(v,\, w) \in V' \cap W'$ τότε $(v,\, w) = (0,\, 0)$. Συνεπώς $V \oplus W = V' + W'$.

Λήμμα 4.7 *Εάν $\{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_k\}$ και $\{w_1,\, w_2,\, \ldots,\, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα (παράγοντα σύνολα, βάσεις) στους διανυσματικούς χώρους V και W αντίστοιχα, τότε*

$$\{(v_1,\, 0),\, (v_2,\, 0),\, \ldots,\, (v_k,\, 0),\, (0,\, w_1),\, (0,\, w_2),\, \ldots,\, (0,\, w_m)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο (αντίστοιχα, παράγον σύνολο, βάση) του $V \oplus W$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι τα στοιχεία $a_1,\, \ldots,\, a_k,\, b_1,\, \ldots,\, b_m$ του $\mathbb{K}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$a_1(v_1,\, 0) + \cdots + a_k(v_k,\, 0) + b_1(0,\, w_1) + \cdots + b_m(0,\, w_m) = (0,\, 0)\,.$$

Τότε ισχύει $(a_1v_1+\cdots+a_kv_k, b_1w_1+\cdots+b_mw_m) = (0,\, 0)$, και συνεπώς $a_1v_1+\cdots+a_kv_k = 0$ και $b_1w_1 + \cdots + b_mw_m = 0$.

Αν $\{v_1,\, \ldots,\, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο V, συμπεραίνουμε οτι $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. Αντίστοιχα, αν $\{w_1,\, \ldots,\, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο W, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. Δείξαμε οτι

$$\{(v_1,\, 0),\, (v_2,\, 0),\, \ldots,\, (v_k,\, 0),\, (0,\, w_1),\, (0,\, w_2),\, \ldots,\, (0,\, w_m)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $V \oplus W$.

Τώρα θεωρούμε στοιχείο $(v,\, w) \in V \oplus W$. Αν $\{v_1,\, \ldots,\, v_k\}$ είναι παράγον σύνολο του V, υπάρχουν $a_1,\, \ldots,\, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$. Αντίστοιχα, αν $\{w_1,\, \ldots,\, w_m\}$ είναι παράγον σύνολο του W, υπάρχουν $b_1,\, \ldots,\, b_m \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $w = b_1w_1+\cdots+b_mw_m$. Συμπεραίνουμε οτι

$$(v,\, w) = a_1(v_1,\, 0) + \cdots + a_k(v_k,\, 0) + b_1(0,\, w_1) + \cdots + b_m(0,\, w_m)\,,$$

και συνεπώς

$$\{(v_1,\, 0),\, (v_2,\, 0),\, \ldots,\, (v_k,\, 0),\, (0,\, w_1),\, (0,\, w_2),\, \ldots,\, (0,\, w_m)\}$$

είναι παράγον σύνολο του $V \oplus W$.

□

Άμεση συνέπεια του Λήμματος είναι το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 4.8 *Εάν V και W είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τότε*

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W\,.$$

□

Παράδειγμα 4.12 Εάν X και Y είναι ξένα σύνολα, $X \cap Y = \varnothing$, τότε ο διανυσματικός χώρος των απεικονίσεων από το σύνολο $X \cup Y$ στο $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{X \cup Y}$, είναι ισομορφικός με το ευθύ άθροισμα των διανυσματικών χώρων των απεικονίσεων από το X στο $\mathbb{K}$ και από το Y στο $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}^{X\cup Y} \cong \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y \, .$$

Θα κατασκευάσουμε την απεικόνιση $L : \mathbb{K}^{X\cup Y} \longrightarrow \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y$ και θα δείξουμε οτι είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Θεωρούμε $f \in K^{X\cup Y}$, δηλαδή απεικόνιση $f : X\cup Y \longrightarrow \mathbb{K}$. Τότε ορίζονται οι απεικονίσεις περιορισμού της f στα υποσύνολα X και Y, $f|_X : X \longrightarrow \mathbb{K}$ και $f|_Y : Y \longrightarrow \mathbb{K}$. Ορίζουμε $L(f) = (f|_X,\, f|_Y)$. Η L είναι γραμμική. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} L(f+g) &= ((f+g)|_X,\, (f+g)|_Y) \\ &= (f|_X + g|_X,\, f|_Y + g|_Y) \\ &= (f|_X,\, f|_Y) + (g|_X,\, g|_Y)\, . \end{aligned}$$

Για να δείξουμε οτι η L είναι ισομορφισμός, ορίζουμε την απεικόνιση $G : \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y \longrightarrow K^{X\cup Y}$, και δείχνουμε οτι είναι αντίστροφη της L. Για $(f_1,\, f_2) \in \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y$, ορίζουμε $G(f_1,\, f_2) = f$, όπου $f : X \cup Y \longrightarrow \mathbb{K}$ ορίζεται ως

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{εάν } t \in X\, , \\ f_2(t) & \text{εάν } t \in Y\, . \end{cases}$$

Προφανώς, $f|_X = f_1$ και $f|_Y = f_2$, άρα $L \circ G(f_1,\, f_2) = (f_1,\, f_2)$. Επίσης $G \circ L(f) = G(f|_X,\, f|_Y) = f$. Άρα G είναι αντίστροφη της L, και L είναι ισομορφισμός.

Παράδειγμα 4.13 Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους V_1 και V_2 με βάσεις $\mathcal{B}_1 = \{v_{11}, \ldots\ v_{1k}\}$ και $\mathcal{B}_2 = \{v_{21}, \ldots\ v_{2\ell}\}$ αντίστοιχα, και τους διανυσματικούς χώρους W_1 και W_2 με βάσεις $\mathcal{C}_1 = \{w_{11}, \ldots\ w_{1m}\}$ και $\mathcal{C}_2 = \{w_{21}, \ldots\ w_{2n}\}$ αντίστοιχα.

Εάν $L_1 : V_1 \longrightarrow W_1$ και $L_2 : V_2 \longrightarrow W_2$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση

$$L_1 \oplus L_2 : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow W_1 \oplus W_2$$

η οποία απεικονίζει το διάνυσμα $(u_1,\, u_2) \in V_1 \oplus V_2$ στο διάνυσμα $(L_1(u_1),\, L_2(u_2)) \in W_1 \oplus W_2$.

Εάν A είναι ο πίνακας της L_1 ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{C}_1$, και B είναι ο πίνακας της L_2 ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2$ και $\mathcal{C}_2$, τότε ο πίνακας της απεικόνισης $L_1 \oplus L_2$ ως προς τις βάσεις

$$\{(v_{11},\, 0),\, \ldots,\, (v_{1k},\, 0),\, (0,\, v_{21}),\, \ldots,\, (0,\, v_{2\ell})\} \quad \text{του } V_1 \oplus V_2 \tag{4.3}$$

και

$$\{(w_{11},\, 0),\, \ldots,\, (w_{1m},\, 0),\, (0,\, w_{21}),\, \ldots,\, (0,\, w_{2n})\} \quad \text{του } W_1 \oplus W_2 \tag{4.4}$$

είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} .$$

Με το ευθύ άθροισμα δύο διανυσματικών χώρων V και W συνδέονται οι ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις:

1. Οι **κανονικές εμφυτεύσεις** του V και του W στο $V \oplus W$,

$$j_1 : V \longrightarrow V \oplus W \ : \ v \mapsto (v,\, 0)$$
$$j_2 : W \longrightarrow V \oplus W \ : \ w \mapsto (0,\, w)\,.$$

2. Οι **κανονικές προβολές** του $V \oplus W$ επί των V και W,

$$p_1 : V \oplus W \longrightarrow V \ : \ (v,\, w) \mapsto v$$
$$p_2 : V \oplus W \longrightarrow W \ : \ (v,\, w) \mapsto w\,.$$

Παράδειγμα 4.14 Θεωρούμε τους χώρους V_1, V_2, W_1 και W_2 του Παραδείγματος 4.13, και τις απεικονίσεις $j_1 : V_1 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$, $j_2 : V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$ και $p_1 : W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_1$, $p_2 : W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_2$.

Εάν $L : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow W_1 \oplus W_2$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε το πίνακας της L ως προς τις βάσεις 4.3 και 4.4, είναι ο

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix},$$

όπου A είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{11} = p_1 \circ L \circ j_1$, C είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{12} = p_1 \circ L \circ j_2$, D είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{21} = p_2 \circ L \circ j_1$ και B είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{22} = p_2 \circ L \circ j_2$.

4.9 Χώρος πηλίκο

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμικό υπόχωρο X του V. Στο V ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$v \sim w \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad v - w \in X\,.$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αυτής της σχέσης το ονομάζουμε **πηλίκο** του V με το X, και το συμβολίζουμε

$$V/\,X\,.$$

Την κλάση ισοδυναμίας του $v \in V$ ως προς αυτή τη σχέση τη συμβολίζουμε

$$v + X, \quad \text{ή} \quad \tilde{v}\,.$$

Παράδειγμα 4.15 Στο $\mathbb{R}^3$, θεωρούμε τον υπόχωρο $X = \{(t,\, t,\, 2t)\,|\, t \in \mathbb{R}\}$. X είναι η ευθεία που περνάει από τα σημεία $(0,\, 0,\, 0)$ και $(1,\, 1,\, 2)$. Η κλάση ισοδυναμίας του σημείου $(x,\, y,\, z)$ στο πηλίκο $\mathbb{R}^3/X$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής

$$(x,\, y,\, z) + (t,\, t,\, 2t) \quad t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή είναι η ευθεία που περνάει από το (x, y, z) και είναι παράλληλη προς τον X. Το σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}^3/X$ είναι το σύνολο όλων των ευθειών στο $\mathbb{R}^3$ που είναι ίσες ή παράλληλες με την X.

Στο πηλίκο V/X ορίζουμε τις πράξεις, για $v + X$, $y + X \in V/X$, $a \in \mathbb{K}$.

$$(v + X) + (w + X) = (v + w) + X$$

$$a\,(v + X) = a\,v + X\,.$$

Λήμμα 4.9 *Με αυτές τις πράξεις V/X είναι διανυσματικός χώρος πάνω απο το $\mathbb{K}$.*

Ο διανυσματικός χώρος V/X ονομάζεται **χώρος πηλίκο** του $V \bmod X$.

Απόδειξη. Μηδέν είναι η κλάση του $X = 0+X$ και το αντίθετο του $v+X$ είναι $-(v+X) = (-v) + X$. Εύκολα ελέγχουμε τα υπόλοιπα αξιώματα.

□

Ορίζεται κανονική *επεικόνιση* $P : V \to V/X$, με $v \mapsto v + X$, η οποία είναι γραμμική: εάν u, $v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} P(au + v) &= (au + v) + X \\ &= a(u + X) + (v + X) \\ &= aP(u) + P(v)\,. \end{aligned}$$

Θεώρημα 4.10 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης και υπόχωρο X του V. Εάν $\{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι βάση του X, και $\{x_1, \ldots, x_k, v_1, \ldots, v_m\}$ βάση του V, τότε $\{v_1 + X, \ldots, v_m + X\}$ αποτελεί βάση του V/X, και συνεπώς*

$$\dim(V/X) = \dim V - \dim X\,.$$

Απόδειξη. Εστω $v \in V$. Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k$ και $b_1, \ldots, b_m$ τέτοια ώστε $v = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + b_1v_1 + \cdots + b_mv_m$. Τότε $v - (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) \in X$, άρα

$$\begin{aligned} v + X &= (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) + X \\ &= b_1(v_1 + X) + \cdots + b_m(v_m + X) \end{aligned}$$

άρα $\{v_1 + X, \cdots, v_m + X\}$ παράγουν το V/X.

Έστω $b_1(v_1 + X) + \cdots + b_m(v_m + X) = 0$. Τότε $b_1v_1 + \cdots + b_mv_m \in X$, άρα υπάρχουν $a_1, \cdots, a_k$ τέτοια ώστε $b_1v_1+\cdots+b_mv_m = a_1x_1+\cdots+a_kx_k$. Αλλά απο γραμμική ανεξαρτησία των $\{x_1, \cdots, x_k, v_1, \cdots, v_m\}$ έχουμε $a_1 = \cdots = a_k = b_1 = \cdots = b_m = 0$. Άρα το σύνολο $\{v_1 + X, \cdots, v_m + X\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και αποτελεί βάση του V/X.

□

Παράδειγμα 4.16 Θεωρούμε το 'πολύεδρο' του σχήματος, με μία έδρα σ, πέντε ακμές α, β, γ, δ, ε και τέσσερεις κορυφές A, B, C, D.

Ορίζουμε τους διανυσματικούς χώρους

$$C_0 = \{a_1 A + a_2 B + a_3 C + a_4 D \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$C_1 = \{b_1 \alpha + b_2 \beta + \cdots + b_5 \varepsilon \,|\, b_i \in \mathbb{R}\}$$

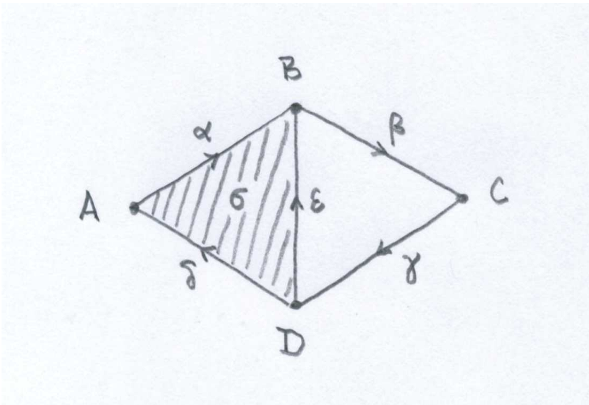
$$C_2 = \{s\sigma \,|\, s \in \mathbb{R}\}.$$

και τις γραμμικές απεικονίσεις

$$\partial_2 : C_2 \to C_1, \qquad \partial_1 : C_1 \to C_0$$

με $\partial_2(\sigma) = \alpha + \delta - \varepsilon$ και

$$\begin{aligned} &\partial_1(b_1\alpha + \cdots + b_5\varepsilon) = \\ &= b_1(B-A) + b_2(C-B) + b_3(D-C) + b_4(A-D) + b_5(B-D) \\ &= (b_4 - b_1)A + (b_1 - b_2 + b_5)B + (b_2 - b_3)C + (b_3 - b_4 - b_5)D. \end{aligned}$$



Σχήμα 4.1: Ένα "πολύεδρο".

Λήμμα 4.11 (Λήμμα Poincaré)

$$\partial_1 \partial_2 = 0.$$

Απόδειξη. $\partial_1\partial_2(\sigma) = \partial_1(\alpha + \delta - \varepsilon) = (B - A) + (A - D) + (B - D) = 0.$

□

Συνεπώς $\operatorname{im}\partial_2 \subseteq \ker\partial_1$ και ορίζεται ο διανυσματικός χώρος πηλίκο

$$H_1 = \ker\partial_1 / \operatorname{im}\partial_2.$$

Θα προσδιορίσουμε μία βάση του H_1. Πρώτα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που ορίζουν το $\ker\partial_1$, και βρίσκουμε οτι τα διανύσματα $\beta + \gamma + \varepsilon$ και $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ αποτελούν μία βάση του χώρου $\ker\partial_1$. Το διάνυσμα $\alpha + \delta - \varepsilon$ αποτελεί μία βάση του $\operatorname{im}\partial_2$. Από το Θεώρημα

4.10, για να προσδιορίσουμε μία βάση του πηλίκου $\ker \partial_1/\operatorname{im} \partial_2$, πρέπει να βρούμε μία βάση του $\ker \partial_1$ η οποία να περιέχει το διάνυσμα $\alpha + \delta - \varepsilon$ της βάσης του $\operatorname{im} \partial_2$. Παρατηρούμε οτι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha + \delta - \varepsilon) + (\beta + \gamma + \varepsilon)$ και συνεπώς $\{\alpha + \delta - \varepsilon, \beta + \gamma + \varepsilon\}$ είναι βάση του $\ker \partial_1$. Συμπεραίνουμε οτι το διάνυσμα $(\beta + \gamma + \varepsilon) + \operatorname{im} \partial_2$ αποτελεί βάση του H_1.

Η διάσταση του H_1 μετράει τις 'τρύπες' στο πολύεδρο. Το στοιχείο της συγκεκριμένης βάσης που βρήκαμε διαγράφει έναν 'κύκλο' γύρω από την τρύπα του πολυέδρου.

Θεώρημα 4.12 (Θεώρημα Ισομορφισμού) *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$.*

1. *Η απεικόνιση $\tilde{L} : V/\ker L \longrightarrow W$, $\tilde{L}(v + \ker L) = L(v)$, είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση, και η L παραγοντοποιείται ως σύνθεση $L = \tilde{L} \circ P$, όπου $P : V \longrightarrow V/\ker L$ είναι η κανονική επεικόνιση $v \longmapsto v + \ker L$.*
2. *Υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*

$$V/\ker L \cong \operatorname{im} L\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κλάση ισοδυναμίας του v στο $V/\ker L$, δηλαδή $v+\ker L = \{u \in V \mid u - v \in \ker L\}$. Παρατηρούμε οτι εάν $u \in v + \ker L$ τότε $L(u) = L(v)$. Αρα η απεικόνιση $\tilde{L} : V/\ker L \longrightarrow W$, $\tilde{L}(v + \ker L) = L(v)$ είναι καλά ορισμένη. Ελέγχουμε οτι η $\tilde{L}$ είναι γραμμική:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}\left(a(v + \ker L) + (u + \ker L)\right) &= \tilde{L}\left((a\,v + u) + \ker L\right)\\
&= L(a\,v + u)\\
&= a\,L(v) + L(u)\\
&= a\,\tilde{L}(v + \ker L) + \tilde{L}(u + \ker L)\,.
\end{aligned}$$

Η $\tilde{L}$ είναι μονομορφισμός, εφ' όσον εάν $L(v) = L(u)$, τότε $v - u \in \ker L$ και $v + \ker L = u+\ker L$. Η $\tilde{L}$ είναι επεικονική στην εικόνα της L, γιατί εάν $w = L(v)$, τότε $w = \tilde{L}(v+\ker L)$. Συμπεραίνουμε οτι $\tilde{L}$ είναι ισομορφισμός από το πηλίκο $V/\ker L$ στην εικόνα $\operatorname{im} L$.

□

Στη συνέχεια δίδουμε δύο άλλα αποτελέσματα, τα οποία αναφέρονται ως Δεύτερο και Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού.

Πρόταση 4.13 (Δεύτερο και Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού.)

1. *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και X, Y γραμμικούς υπόχωρους του V. Τότε υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*

$$(X+Y)/Y \cong X/(X \cap Y)\,.$$

2. *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και X, Y γραμμικούς υπόχωρους του V τέτοιους ώστε $X \subseteq Y$. Τότε Y/X είναι υπόχωρος του V/X, και υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*
$$(V/X)/(Y/X) \cong V/Y\,.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του Δεύτερου Θεωρήματος Ισομορφισμού, θεωρούμε το μονομορφισμό $i : X \longrightarrow X+Y$ και τον επιμορφισμό $p : X+Y \longrightarrow (X+Y)/Y$. Θα δείξουμε οτι η σύνθεση $L = p \circ i$ είναι επιμορφισμός, με πυρήνα $X \cap Y$.

Συγκεκριμένα θα δείξουμε οτι για κάθε $(x+y)+Y \in (X+Y)/Y$, $L(x) = (x+y)+Y$. Πράγματι, αφού $y \in Y$, $(x+y)+Y = x+Y = L(x)$. Άρα L είναι επιμορφισμός. Εάν $x \in \ker L$, τότε $L(x) = x+Y = 0+Y$, δηλαδή $x \in Y$. Άρα ο πυρήνας είναι ακριβώς $X \cap Y$. Από το Θεώρημα Ισομορφισμού,

$$(X+Y)/\,Y \cong X/\,(X \cap Y)\,.$$

Για την απόδειξη του Τρίτου Θεωρήματος Ισομορφισμού, θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $X \subseteq Y \subseteq V$. Τότε προφανώς $Y/\,X$ είναι υποσύνολο του $V/\,X$. Για να δείξουμε οτι είναι γραμμικός υπόχωρος, θεωρούμε γραμμικό συνδυασμό $a(y_1+X)+(y_2+X)$ με $y_1, y_2 \in Y$. Αυτός είναι ίσος με $(ay_1+y_2)+X$ και συνεπώς ανήκει στο $Y/\,X$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την αντιστοίχιση $v+X \longmapsto v+Y$, για $v \in V$. Αυτή δίδει μία καλά ορισμένη απεικόνιση $L : V/\,X \longrightarrow V/\,Y$, αφού εάν $v_1 - v_2 \in X$, τότε $v_1 - v_2 \in Y$, και συνεπώς εάν $v_1 + X = v_2 + X$, τότε $L(v_1+X) = L(v_2+X)$. Θα δείξουμε οτι η L είναι επιμορφισμός, με πυρήνα $Y/\,X$. Θεωρούμε $v+Y \in V/\,Y$. Τότε $v+X \in V/\,X$ και $L(v+X) = v+Y$, συνεπώς L είναι επιμορφισμός. Η κλάση $v+X$ ανήκει στον πυρήνα της L εάν και μόνον εάν $L(v+X) = 0+Y$, δηλαδή $v \in Y$ και $v+X \in Y/\,X$. Άρα $\ker L = V/\,Y$. Από το Θεώρημα Ισομορφισμού,

$$V/\,Y \cong (V/\,X)/\,(Y/\,X)\,.$$

□

Παράδειγμα 4.17 Υπάρχει επίσης ισομορφισμός $V \cong \ker L \oplus \operatorname{im} L$, αλλά αυτός δεν είναι κανονικός. Εάν επιλέξουμε μία βάση $\{w_1, \ldots, w_m\}$ του $\operatorname{im} L$, και $v_1, \ldots, v_m$ τέτοια ώστε $L(v_i) = w_i$, τότε τα $v_1, \ldots, v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και ορίζεται γραμμική ενεικόνιση, $M_2 : \operatorname{im} L \to V \,:\, w_i \mapsto v_i$. Η απεικόνιση

$$M \,:\, \ker L \oplus \operatorname{im} L \to V \,:\, (v,\, w) \mapsto v + M_2(w)$$

είναι ισομορφισμός, αλλά εξαρτάται από την επιλογή των v_i.

4.10 Δυϊκοί χώροι

Εχουμε δεί οτι το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από ένα διανυσματικό χώρο V σε ένα διανυσματικό χώρο W είναι επίσης διανυσματικός χώρος, ο $\mathcal{L}(U, V)$. Στην περίπτωση που W είναι ο μονοδιάστατος χώρος $\mathbb{K}$, ονομάζουμε τον $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ **δυϊκό χώρο** του V, και τον συμβολίζουμε V'.

Παράδειγμα 4.18 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ ορίζονται οι *συναρτήσεις συντεταγμένων* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Εάν $x = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε $\varphi_k(x) = x_k$.

Εάν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$, έχουμε $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Εάν $\psi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι οποιαδήποτε γραμμική συνάρτηση, η ψ καθορίζεται από τις τιμές της στα στοιχεία της βάσης: εάν $\psi(e_i) = a_i \in \mathbb{K}$, τότε για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \\ &= x_1\psi(e_1) + \cdots + x_n\psi(e_n) \\ &= x_1a_1 + \cdots + x_na_n\,, \end{aligned}$$

δηλαδή, για κάθε γραμμική συνάρτηση $\psi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, $\psi(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων $x_i = \varphi_i(x)$ του x,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x_1a_1 + \cdots + x_na_n \\ &= \varphi_1(x)a_1 + \cdots + \varphi_n(x)a_n\,, \end{aligned}$$

αλλά καθώς ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{K}$ είναι μεταθετικός,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) \\ &= (a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n)(x)\,. \end{aligned}$$

Καθώς αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{K}^n$, έχουμε $\psi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$, και οι συναρτήσεις συντεταγμένων φ_i παράγουν το δυϊκό χώρο $(\mathbb{K}^n)'$.

Συμβολισμός. Εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό των συναρτήσεων, $\varphi(x) = a$, για στοιχεία του δυϊκού χώρου χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός

$$\langle x, \varphi\rangle = a\,.$$

Παράδειγμα 4.19 Στο χώρο $\mathbb{K}[x]$ των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}$ για την οποία $\varphi(p(x)) = \langle p(x), \varphi\rangle = p(0)$ είναι ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{K}[x])'$. Γενικότερα, εάν $t_1, \ldots, t_k$ και $a_1, \ldots, a_k$ είναι στοιχεία του $\mathbb{K}$, τότε η συνάρτηση $\psi : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}$, για την οποία $\psi(p(x)) = \langle p(x), \psi\rangle = a_1p(t_1) + \cdots + a_kp(t_k)$, είναι στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{K}[x])'$.

Παράδειγμα 4.20 Στο χώρο $C^0[0,\,1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0,\,1]$, εάν $0 \le a < b \le 1$, και $\alpha\,:\,[a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, η συνάρτηση $\psi\,:\,C^0[0,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, για την οποία
$$\psi(f) = \langle f,\,\psi\rangle = \int_a^b \alpha(t)\,f(t)\,dt$$
είναι στοιχείο του δυϊκού χώρου $(C^0[0,\,1])'$.

Παράδειγμα 4.21 Θεωρούμε μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f\,:\,\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Το διαφορικό της f στο σημείο $(x_1,\,\dots,\,x_n)$ είναι η γραμμική απεικόνιση
$$Df(x_1,\,\dots,\,x_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (v_1,\,\dots,\,v_n) \longmapsto v_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\,.$$
Δηλαδή $Df(x_1,\,\dots,\,x_n) \in (\mathbb{R}^n)'$ και Df είναι μία απεικόνιση $Df\,:\,\mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)'$, εν γένει μη γραμμική.

Υπενθυμίζουμε οτι εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, $\{v_1,\,\dots,\,v_n\}$ είναι βάση του V, και $a_1,\,\dots,\,a_n \in \mathbb{K}$, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi \in \mathcal{L}(V,\,\mathbb{K})$ τέτοια ώστε $\varphi(v_i) = a_i$ για κάθε $i = 1,\,\dots,\,n$. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\varphi \in V'$ τέτοιο ώστε $\langle v_i,\,\varphi\rangle = a_i$.

Θεώρημα 4.14 *Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\{v_1,\,\dots,\,v_n\}$ είναι βάση του V, τότε υπάρχει βάση του V', $\{\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n\}$, για την οποία, με το συμβολισμό $\delta_{i\,j}$ του Kronecker,*
$$\varphi_j(v_i) = \langle v_i,\,\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$$
και άρα
$$\dim V' = \dim V\,.$$

Η βάση $\{\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n\}$ ονομάζεται **δυϊκή βάση** της $\{v_1,\,\dots,\,v_n\}$.

Απόδειξη. Πρώτα δείχνουμε οτι το $\{\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Ο γραμμικός συνδυασμός $\psi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$ είναι 0 εάν και μόνον εάν $\psi(v) = 0$ για κάθε $v \in V$. Ειδικότερα, για κάθε $i = 1,\,\dots,\,n$, έχουμε
$$\begin{aligned} 0 = \psi(v_i) &= \langle v_i,\,a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n\rangle \\ &= a_1\langle v_i,\,\varphi_1\rangle + \cdots + a_n\langle v_i,\,\varphi_n\rangle \\ &= a_1\delta_{i1} + \cdots + a_n\delta_{in} \\ &= a_i \end{aligned}$$
και συμπεραίνουμε οτι $\{\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Για να δείξουμε οτι τα $\varphi_1,\,\dots,\,\varphi_n$ παράγουν το δυϊκό χώρο V', θεωρούμε $\psi \in V'$ με $\langle v_i,\,\psi\rangle = c_i$ για κάθε $i = 1,\,\dots,\,n$, και $u = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$. Τότε
$$\langle u,\,\psi\rangle \;=\; \langle b_1v_1 + \cdots + b_nv_n,\,\psi\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= b_1\langle v_1,\, \psi\rangle + \cdots + b_n\langle v_n,\, \psi\rangle \\
&= b_1c_1 + \cdots + b_nc_n \\
&= \langle u,\, \varphi_1\rangle c_1 + \cdots + \langle u,\, \varphi_n\rangle c_n \\
&= \langle u,\, c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n\rangle
\end{aligned}
$$

άρα $\psi = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$.

□

Θεώρημα 4.15 *Εάν $v,\, w \in V$ και $v \neq w$, τότε υπάρχει $\psi \in V'$ τέτοιο ώστε $\langle v,\, \psi\rangle \neq \langle w,\, \psi\rangle$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε βάση $\{v_i,\, \ldots,\, v_n\}$ του V, και τη δυϊκή βάση $\{\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n\}$ του V'. Εάν $\langle v,\, \psi\rangle = \langle w,\, \psi\rangle$ για όλα τα $\psi \in V'$, τότε, για κάθε φ_i της δυϊκής βάσης, έχουμε $\langle v - w,\, \varphi_i\rangle = 0$, και $v - w = \langle u - w,\, \varphi_1\rangle v_1 + \cdots + \langle v - w,\, \varphi_n\rangle v_n = 0$.

□

Αφού ο δυϊκός χώρος V' είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, μπορούμε να θεωρήσουμε το δυϊκό του χώρο, $(V')'$, ο οποίος συμβολίζεται V''. Ένα στοιχείο χ του χώρου V'' είναι μία γραμμική συνάρτηση στο χώρο V',

$$\chi \,:\, V' \longrightarrow \mathbb{K} \,:\, \psi \longmapsto \chi(\psi)\,.$$

Παράδειγμα 4.22 Εάν $v \in V$, τότε η απεικόνιση $\eta : \psi \longmapsto \langle v,\, \psi\rangle$ είναι γραμμική ως προς το ψ, (Ασκηση: Τί ακριβώς σημαίνει αυτό;). Συνεπώς για κάθε $v \in V$ ορίζεται, με φυσικό τρόπο, ένα $\eta \in V''$. Θα δούμε οτι, για χώρους πεπερασμένης διάστασης, αυτή η αντιστοιχία είναι ένας ισομορφισμός.

Θεώρημα 4.16 *Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε η απεικόνιση*

$$\nu \,:\, V \longrightarrow V'' \,:\, v \longmapsto (\eta \,:\, \psi \longmapsto \langle v,\, \psi\rangle)$$

είναι (κανονικός) ισομορφισμός.

Απόδειξη. Η ν είναι γραμμική:

$$
\begin{aligned}
\nu(a\,v + w)(\psi) &= \langle a\,v + w,\, \psi\rangle \\
&= a\,\langle v,\, \psi\rangle + \langle w,\, \psi\rangle \\
&= a\,\nu(v)(\psi) + \nu(w)(\psi)\,.
\end{aligned}
$$

Για να δείξουμε οτι η ν είναι ενεικόνιση, θεωρούμε $v,\, w \in V$. Εάν $\nu(v) = \nu(w)$ τότε, για κάθε $\psi \in V'$, $\psi(v) = \psi(w)$, και από το Θεώρημα 4.15, $v = w$.

Από το Θεώρημα 4.14, $\dim V'' = \dim V' = \dim V$, και συνεπώς η ν είναι επεικόνιση.

□

Εάν $L : V \longrightarrow W$ είναι γραμμική απεικόνιση, μπορούμε να ορίσουμε τη **δυϊκή απεικό-**

νιση L' (ή **ανάστροφη απεικόνιση** L^T) ανάμεσα στους δυϊκούς χώρους:

$$L' : W' \longrightarrow V' \quad , \quad L'(\psi) = \psi \circ L \,.$$

Προσέξτε οτι η L' έχει φορά αντίθετη από την L, και ικανοποιεί τη σχέση $\langle v,\, L'\psi\rangle = \langle Lv,\, \psi\rangle$.

Παρατηρούμε οτι η αντιστοιχία $L \mapsto L'$ είναι γραμμική απεικόνιση από το $\mathcal{L}(V, W)$ στο $\mathcal{L}(W', V')$: $(a\, L + M)' = a\, L' + M'$.

Λήμμα 4.17 *Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $L : U \longrightarrow V$ και $M : V \longrightarrow W$. Τότε*

1. *$(M \circ L)' = L' \circ M'$.*
2. *Εάν η $L : U \longrightarrow V$ είναι αντιστρέψιμη, τότε η $L' : V' \longrightarrow U'$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και $(L^{-1})' = (L')^{-1}$.*
3. *Εάν οι χώροι U και V είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε το ακόλουθο διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων μετατίθεται:*

$$\begin{array}{ccccc} & U & \longrightarrow & V & \\ \nu_U & \downarrow & & \downarrow & \nu_V \\ & U'' & \longrightarrow & V'' & \end{array} \;,$$

δηλαδή

$$\nu_V \circ L = L'' \circ \nu_U \,,$$

όπου $L'' = (L')'$ και ν_U, ν_V είναι οι κανονικοί ισομορφισμοί.

Απόδειξη. Εάν $\zeta \in W'$, τότε

$$\begin{aligned} (M \circ L)'(\zeta) &= \zeta \circ (M \circ L) \\ &= (\zeta \circ M) \circ L \\ &= L'(\zeta \circ M) \\ &= L'(M'(\zeta)) \\ &= L' \circ M'(\zeta) \end{aligned}$$

Εάν η L είναι αντιστρέψιμη, τότε

$$\left(L^{-1}\right)' \circ L' = \left(L \circ L^{-1}\right)' = (\mathbf{I}_V)' = \mathbf{I}_{V'}$$

και

$$L' \circ \left(L^{-1}\right)' = \left(L^{-1} \circ L\right)' = (\mathbf{I}_U)' = \mathbf{I}_{U'} \,.$$

Εάν $u \in U$ και $\varphi \in U'$, έχουμε $\nu_U(u)(\varphi) = \langle u,\, \varphi\rangle$. Εάν $\psi \in V'$, έχουμε

$$\begin{aligned} L''\nu_U(u)(\psi) &= \nu_U(u)(L'\psi) \\ &= \langle u,\, L'\psi\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle Lu,\, \psi\rangle \\ &= \nu_V(Lu)(\psi) \\ &= \nu_V \circ L(u)(\psi)\,. \end{aligned}$$

□

4.11 Πίνακας δυϊκής απεικόνισης

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W, με βάσεις $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ αντίστοιχα.

Γνωρίζουμε οτι ορίζεται η δυϊκή βάση $\mathcal{B}' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ του δυϊκού χώρου V', όπου

$$\varphi_i(v_j) = \langle v_j,\, \varphi_i\rangle = \delta_{i\,j} \quad \text{για} \quad i,\, j = 1, \ldots, n$$

και η δυϊκή βάση $\mathcal{C}' = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ του δυϊκού χώρου W', όπου

$$\psi_k(w_\ell) = \langle w_\ell,\, \psi_k\rangle = \delta_{k\,\ell} \quad \text{για} \quad k,\, \ell = 1, \ldots, m\,.$$

Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$ και τον πίνακα $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ της απεικόνισης L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ του V και $\mathcal{C}$ του W. Η δυϊκή απεικόνιση $L' : W' \longrightarrow V'$ έχει πίνακα ως προς τις βάσεις $\mathcal{C}'$ και $\mathcal{B}'$, $A' = {}_{\mathcal{B}'}L'_{\mathcal{C}'} = (a'_{j\,k})$ τέτοιο ώστε

$$L'(\psi_k) = \sum_{j=1}^{n} a'_{j\,k}\varphi_j\,. \tag{4.5}$$

Όμως γνωρίζουμε οτι η δυϊκή απεικόνιση ικανοποιεί, για κάθε $k = 1, \ldots, m$ και κάθε $v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$,

$$\begin{aligned} L'(\psi_k)(v) &= \psi_k \circ L(v) \\ &= \psi_k(Av) \\ &= \psi_k\left(\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{\ell\,j}b_jw_\ell\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell\,j}b_j\psi_k(w_\ell) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{k\,j}b_j \qquad \text{αφού } \psi_k(w_\ell) = 0 \text{ όταν } \ell \neq k, \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{k\,j}\varphi_j(v) \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$L'(\psi_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{k\,j}\varphi_j\,. \tag{4.6}$$

Συγκρίνοντας τις 4.5 και 4.6, καταλήγουμε οτι $a'_{j\,k} = a_{k\,j}$, δηλαδή οτι ο πίνακας $A' = {}_{\mathcal{B}'}L'_{\mathcal{C}'}$ της δυϊκής απεικόνισης $L' : W' \longrightarrow V'$ είναι ο **ανάστροφος** του πίνακα $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ της απεικόνισης $L : V \longrightarrow W$.

Παράδειγμα 4.23 Θεωρούμε πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ και την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Οι συναρτήσεις συντεταγμένων ορίζουν βάσεις στους δυϊκούς χώρους $(\mathbb{R}^3)'$ και $(\mathbb{R}^2)'$: εάν $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ και $\mathcal{E}_2 = \{f_1, f_2\}$ είναι οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$, οι δυϊκές βάσεις είναι $\mathcal{E}'_3 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ και $\mathcal{E}'_2 = \{\psi_1, \psi_2\}$, όπου $\varphi_i(e_j) = \delta_{i\,j}$ για $i, j = 1, 2, 3$ και $\psi_k(f_\ell) = \delta_{k\,\ell}$ για $k, \ell = 1, 2$.

Η δυϊκή απεικόνιση $(T_A)' : (\mathbb{R}^2)' \longrightarrow (\mathbb{R}^3)'$ απεικονίζει τη συνάρτηση $\psi \in (\mathbb{R}^2)'$ με $\langle f_k, \psi\rangle = b_k$ για $k = 1, 2$, στη συνάρτηση $(T_A)'(\psi) \in (\mathbb{R}^3)'$ με $\langle e_i, (T_A)'(\psi)\rangle = c_i$ για $i = 1, 2, 3$, και

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, εάν $\psi(y_1, y_2) = b_1y_1 + b_2y_2$, τότε

$$(T_A)'(\psi)(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = b_1x_1 + 2(b_1 + b_2)x_2 + (b_2 - b_1)x_3\,.$$

4.12 Ασκήσεις

Άσκηση 4.6 Θεωρήστε τα διανύσματα x, y, u και v στο $\mathbb{K}^4$, όπου $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα στο οποίο $1 \neq -1$, και τους υπόχωρους Z και W που παράγονται απο τα σύνολα $\{x, y\}$ και $\{u, v\}$ αντίστοιχα. Σε ποιές απο τις ακόλουθες περιπτώσεις ισχύει οτι $\mathbb{K}^4 = Z \oplus W$.

1.
$$x = (1, 1, 0, 0) \qquad y = (1, 0, 1, 0)$$
$$u = (0, 1, 0, 1) \qquad v = (0, 0, 1, 1)$$

2.
$$x = (1, 0, 0, 1) \qquad y = (0, 1, 1, 0)$$
$$u = (1, 0, -1, 0) \qquad v = (0, 1, 0, 1)$$

Άσκηση 4.7 Εάν X, Y, Z είναι διανυσματικοί χώροι πάνω απο το σώμα $\mathbb{K}$, δείξτε οτι υπάρχουν ισομορφισμοί.

1. $X \oplus Y \cong Y \oplus X$

2. $X \oplus (Y \oplus Z) \cong (X \oplus Y) \oplus Z$

Άσκηση 4.8 Έστω διανυσματικός χώρος U και υπόχωροι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ του U. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ και $V = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$.

1. Δείξτε οτι $Y \cong V$ εάν και μόνον εάν για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ισχύει $(X_1 + \cdots + X_i) \cap X_{i+1} = 0$.

2. Δείξτε οτι εάν $Y \cong V$ τότε $X_i \cap X_j = 0$ για κάθε $i \neq j$. Βρείτε ένα παράδειγμα με τρείς υπόχωρους X_1, X_2, X_3 για να δείξετε οτι δεν ισχύει το αντίστροφο.

Άσκηση 4.9 Εάν $L : V \to X$ και $M : W \to Y$ είναι γραμμικές απεικονίσεις διανυσματικών χώρων πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, δείξτε οτι ορίζεται απεικόνιση $L \oplus M$ από το $V \oplus W$ στο $X \oplus Y$,

$$L \oplus M(v, w) = (L(v), M(w)),$$

η οποία είναι γραμμική. Δείξτε οτι $\operatorname{im}(L \oplus M) = \operatorname{im} L \oplus \operatorname{im} M$ και οτι $\ker(L \oplus M) = \ker L \oplus \ker M$.

Άσκηση 4.10 Ελέγξτε οτι οι κανονικές εμφυτεύσεις $j_1 : V \longrightarrow V \oplus W$ και $j_2 : W \longrightarrow V \oplus W$ και οι κανονικές προβολές $p_1 : V \oplus W \longrightarrow V$ και $p_2 : V \oplus W \longrightarrow W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, και οτι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$p_1 \circ j_1 = \mathbf{I}_V, \quad p_1 \circ j_2 = 0, \quad p_2 \circ j_1 = 0, \quad p_2 \circ j_2 = \mathbf{I}_W.$$

Άσκηση 4.11 Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, και τον υπόχωρο $\mathbb{P}_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n. Έχει ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}[x]/\mathbb{P}_n$ πεπερασμένη διάσταση;

Άσκηση 4.12 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^4$ θεωρήστε τους υπόχωρους

$$U = \left\{(z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 = z_2\right\} \,,$$

$$V = \left\{(z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 - z_2 - iz_3 + iz_4 = 2z_2 + z_3 = 2z_2 + (1+\mathrm{i})z_3 - iz_4 = 0\right\} .$$

1. Δείξτε οτι $V \subseteq U$.

2. Βρείτε μία βάση του χώρου πηλίκο $U/\,V$.

Άσκηση 4.13 Υποθέτουμε οτι $L : V \longrightarrow W$ είναι γραμμική απεικόνιση, X είναι γραμμικός υπόχωρος του V, Y είναι γραμμικός υπόχωρος του W, και ισχύει $L(X) \subseteq Y$. Δείξτε οτι ορίζεται γραμμική απεικόνιση $\tilde{L} : V/\,X \longrightarrow W/\,Y$, τέτοια ώστε

$$\tilde{L} \circ P = Q \circ L\,,$$

όπου $P : V \longrightarrow V/\,X$ και $Q : W \longrightarrow W/\,Y$ είναι οι κανονικές επεικονίσεις.

Άσκηση 4.14 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, με πραγματικούς συντελεστές, και το σύνολο $W = \{s(x) \in \mathbb{R}[x] : s(x) = q(x)(x^2+1), q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ των πολυωνύμων που διαιρούνται με το $x^{+}1$.

1. Δείξτε οτι W είναι γραμμικός υπόχωρος του V.

2. Δείξτε οτι για κάθε πολυώνυμο $p(x) \in V$ υπάρχει πολυώνυμο $r(x)$ βαθμού ίσου ή μικρότερου από 1, τέτοιο ώστε $p(x) - r(x) \in W$.

3. Θεωρήστε το χώρο πηλίκο $V/\,W$. Δείξτε οτι κάθε πολυώνυμο $p(x) \in V$ ανήκει σε μία κλάση ισοδυναμίας $(ax+b) + W$, για $a,\, b \in \mathbb{R}$.

4. Δείξτε οτι $\mathcal{B} = \{x + W,\, 1 + W\}$ αποτελεί βάση του χώρου πηλίκο $V/\,W$. (Στο 3 δείξατε οτι τα στοιχεία $x + W,\, 1 + W$ παράγουν το χώρο $V/\,W$. Απομένει να δείξετε οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητα.)

Θεωρήστε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Για κάθε πολυώνυμο $p(x) \in V$, ορίζεται ο πίνακας $p(A) \in \mathcal{M}(2,\, \mathbb{R})$. Θεωρήστε το σύνολο των πινάκων $U = \{p(A) \in \mathcal{M}(2,\, \mathbb{R}) : p(x) \in V\}$.

5. Δείξτε οτι U είναι διανυσματικός χώρος.

6. Δείξτε οτι η απεικόνιση $F : V/\,W \longrightarrow U : p(x) + W \longmapsto p(A)$ είναι καλά ορισμένη και είναι (κανονικός) ισομορφισμός $V/\,W \cong U$.

Άσκηση 4.15 Βρείτε ένα μη μηδενικό στοιχείο φ του χώρου $(\mathbb{C}^3)'$, τέτοιο ώστε εάν $x_1 = (1,\,1,\,1)$ και $x_2 = (1,\,1,\,-1)$, τότε $\langle x_1,\,\varphi\rangle = \langle x_2,\,\varphi\rangle = 0$.

Άσκηση 4.16 Τα διανύσματα $x_1 = (1,\,1,\,1)$, $x_2 = (1,\,1,\,-1)$ και $x_3 = (1,\,-1,\,-1)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^3$. Εάν $\{\varphi_1,\,\varphi_2,\,\varphi_3\}$ είναι η δυϊκή βάση του $(\mathbb{C}^3)'$, και $x = (0,\,1,\,0)$, βρείτε τα $\langle x,\,\varphi_1\rangle$, $\langle x,\,\varphi_2\rangle$ και $\langle x,\,\varphi_3\rangle$.

Άσκηση 4.17 Ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις στο $\mathbb{C}^3$ είναι στοιχεία του $(\mathbb{C}^3)'$;

1. $\varphi(z_1,\,z_2,\,z_3) = z_1 + 3z_2$
2. $\varphi(z_1,\,z_2,\,z_3) = z_1 - {z_3}^2$
3. $\varphi(z_1,\,z_2,\,z_3) = z_2 + 1$
4. $\varphi(z_1,\,z_2,\,z_3) = z_1 + z_2 z_3$

Άσκηση 4.18 Θεωρούμε μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $(c_k) = (c_0,\,c_1,\,c_2,\,\ldots)$. Για κάθε πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ ορίζουμε $\psi(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i c_i$. Δείξτε οτι $\psi \in (\mathbb{R}[x])'$, και οτι κάθε στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{R}[x])'$ προκύπτει με αυτόν τον τρόπο, για κατάλληλη επιλογή της ακολουθίας (a_k).

Άσκηση 4.19 Εάν $\psi \in V'$, $\psi \neq 0$ και $a \in \mathbb{K}$, είναι αλήθεια οτι υπάρχει $x \in V$ τέτοιο ώστε $\langle x,\,\psi\rangle = a$;

Άσκηση 4.20 Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους U, V και W, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$. Δείξτε οτι η απεικόνιση $\mathcal{L}(U,\,V) \to \mathcal{L}(U,\,W) : M \mapsto L \circ M$ είναι γραμμική.

Άσκηση 4.21 Δείξτε οτι εάν V είναι διανυσματικός χώρος, και φ είναι μη μηδενικό στοιχείο τουV', τότε το σύνολο

$$U = \{x \in V | \langle x,\,\varphi\rangle = 0\}$$

είναι υπόχωρος του V. Εάν $\dim V < \infty$, βρείτε τη διάσταση του U.

Άσκηση 4.22 Δείξτε οτι εάν φ και $\psi \in V'$ και για κάθε $x \in V$, $\langle x,\,\varphi\rangle = 0$ εάν και μόνον εάν $\langle x,\,\psi\rangle = 0$, τότε υπάρχει $a \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $\psi = a\varphi$.

Άσκηση 4.23 Μία συνάρτηση $Q : W \times V \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **διγραμμική** εάν η Q είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά, δηλαδή, για κάθε $w, z \in W$, $u, v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{array}{ll} Q(w+z,\, u) = Q(w,\, u) + Q(z,\, u) & \qquad Q(aw,\, u) = aQ(w,\, u) \\ Q(w,\, u+v) = Q(w,\, u) + Q(w,\, v) & \qquad Q(w,\, au) = aQ(w,\, u) \end{array}$$

Δείξτε οτι το σύνολο $\mathcal{L}(W,\, V;\, \mathbb{K})$ των διγραμμικών συναρτήσεων στο $W \times V$ είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις κατά σημείο πράξεις.

Άσκηση 4.24 Θεωρούμε μία απεικόνιση $L : W \to V'$, δηλαδή για κάθε $w \in W$, $L(w)$ είναι μία γραμμική απεικόνιση $L(w) : V \to \mathbb{R}$.

1. Τι σημαίνει να είναι η L γραμμική απεικόνιση;
2. Δείξτε οτι εάν L είναι γραμμική, τότε η απεικόνιση $M : W \times V \to \mathbb{R}$, για την οποία $M(w,\, v) = \langle v,\, L(w)\rangle$ είναι διγραμμική.
3. Δείξτε οτι η αντιστοιχία $L \mapsto M$ ορίζει ισομορφισμό μεταξύ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{L}(W,\, V')$ και του χώρου των διγραμμικών συναρτήσεων $\mathcal{L}(W, V; \mathbb{R})$.

4.13 Πίνακες πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$

Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathcal{M}(m,\, n,\, \mathbb{K})$ ή $\mathbb{K}^{m,\, n}$ ή $\mathcal{M}_{m,\, n}(\mathbb{K})$. Το σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ το συμβολίζουμε $\mathcal{M}(n,\, \mathbb{K})$.

Η θεωρία των πινάκων που μελετήσαμε στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, στο μεγαλύτερο μέρος της ισχύει επακριβώς για πίνακες με όρους σε οποιοδήποτε σώμα.

Για οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}(m,\, n,\, \mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος, και ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται όταν αυτοί έχουν κατάλληλο σχήμα. Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, και B είναι $n \times k$ πίνακας πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, ορίζεται το γινόμενο AB, και είναι ο $m \times k$ πίνακας C, ο οποίος έχει στη θέση $i\,j$, δηλαδή στην i γραμμή και στην j στήλη, τον όρο

$$\begin{aligned} c_{i\,j} &= a_{i\,1}\, b_{1\,j} + \cdots + a_{i\,n}\, b_{n\,j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\,\ell}\, b_{\ell\,j}\,. \end{aligned}$$

Η απαλοιφή Gauss μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{K}$ για να μετατρέψουμε ένα $m \times n$ πίνακα σε ένα γραμμοϊσοδύναμο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή.

Η **τάξη** του πίνακα A (ή **βαθμός** του πίνακα A) είναι ο αριθμός $r(A)$,

$$\begin{aligned} r(A) &= \text{αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του } A \\ &= \text{αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του } A \\ &= \text{αριθμός οδηγών στο γραμμοϊσοδύναμο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή} \end{aligned}$$

Προσέξτε οτι σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, κάθε μή μηδενική γραμμή έχει έναν οδηγό. (Καμία φορά μας διαφεύγει ο οδηγός στην τελευταία γραμμή, επειδή δεν χρησιμοποιείται κατά την απαλοιφή).

Πρόταση 4.18 *Κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ αντιστοιχεί σε ένα $m \times n$ πίνακα A, τέτοιο ώστε, για κάθε $b \in \mathbb{K}^n$, $L(b) = Ab$,*

$$L(b_1, \dots, b_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{K}^n$,

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_j = (\delta_{1j}, \dots, \delta_{nj}), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

και τα διανύσματα $L(e_1), \dots, L(e_n) \in \mathbb{K}^m$.

Ορίζουμε τον πίνακα A να έχει στη j στήλη, για $j = 1, \dots, n$, το διάνυσμα $L(e_j) \in \mathbb{K}^m$. Δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

όπου $(a_{1j}, \dots, a_{mj}) = L(e_j)$.

Εάν $b = (b_1, \dots, b_n)$ έχουμε $b = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$, και συνεπώς

$$\begin{aligned} L(b) &= b_1 L(e_1) + \cdots + b_n L(e_n) \\ &= b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + b_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε την παράσταση του γινομένου πίνακα με διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών του πίνακα, και έχουμε

$$\begin{aligned} L(b) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= Ab\,. \end{aligned}$$

□

4.14 Χώροι γραμμικών απεικονίσεων

Να συμπληρωθεί;

******

Επίσης, παρατήρηση για παραγοντοποιήση απεικόνισης. Να δω που θα πάει.

Στη Γραμμική Άλγεβρα I, έχουμε δεί οτι εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, στη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$ αντιστοιχεί μία αντιστρέψιμη απεικόνιση από το χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ στο χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$, και οτι η T_A μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση τριών απεικονίσεων,

$$T_A = E \circ L \circ P\,,$$

όπου $P : \mathbb{R}^n \to \mathcal{R}(A^T)$ είναι η προβολή στο χώρο γραμμών, $L : \mathcal{R}(A^T) \to \mathcal{R}(A)$ είναι η αντιστρέψιμη απεικόνιση $L(x) = Ax$, και $E : \mathcal{R}(A) \to \mathbb{R}^m$ είναι ο εγκλεισμός $E(y) = y$.

Τώρα βλέπουμε οτι σε γενικούς διανυσματικούς χώρους, χωρίς επιλεγμένες βάσεις, έχουμε μια ανάλογη παραγοντοποίηση, όπου τη θέση του χώρου γραμμών καταλαμβάνει το πηλίκο.

Πρόταση 4.19 *Εάν $L : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε $L = E \circ \tilde{L} \circ P$, όπου $P : V \to V/\ker(L)$ είναι η κανονική επεικόνιση, $\tilde{L} : V/\ker(L) \to \mathrm{im}\,(L)$ είναι ο κανονικός ισομορφισμός και $E : \mathrm{im}\,(L) \to W$ είναι ο εγκλεισμός.*

$\square$

4.15 Ασκήσεις