

Μερικές Εφαρμογές της Γραμμικής Άλγεβρας

MEM 106

Γραμμική Άλγεβρα Ι

Θεόδωρος Κατσαούνης

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

- Εξισώσεις Διαφορών
- Αλυσίδες Markov
- Ο αλγόριθμος PageRank

Εξισώσεις Διαφορών

Εξισώσεις Διαφορών

Ορισμός

Εξίσωση Διαφορών(ΕΔ): είναι μία εξίσωση που ορίζει αναδρομικά μια ακολουθία αριθμών

$$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)$$

Παραδείγματα

$$x_{n+1} = \alpha x_n \Rightarrow x_{n+1} = \alpha^2 x_{n-1} = \dots \Rightarrow x_n = \alpha^n x_0, \quad (\text{τάξη } 1)$$

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \quad \text{ακολουθία } Fibonacci, \quad (\text{τάξη } 2)$$

$$x_{n+1} = 2x_{n-1} - 3x_{n-2} \quad (\text{τάξη } 3)$$

- **Τάξη:** Η διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου δείκτη των x_n .
- **Αρχικές Συνθήκες :** οι τιμές των x_0, x_1, \dots, x_{k-1} όπου k η τάξη της ΕΔ
- **Λύση:** Μια ακολουθία $x_n = G(n, x_0, x_1, \dots, x_k)$ που επαληθεύει την ΕΔ

Εξισώσεις Διαφορών - Πίνακες

- Θεωρούμε γραμμικές ΕΔ τάξεως $k \geq 1$.
- Ζητούμε τη λύση της ΕΔ : $x_n = G(n, x_0, x_1, \dots, x_k)$
- **Βασική Ιδέα:**
 - 1 γράφουμε την ΕΔ σαν γραμμικό σύστημα της μορφής $u_{n+1} = Au_n$,
 $u_n = (x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n)$, $A \in \mathbb{R}^{k,k}$
 - 2 $u_{n+1} = Au_n = A^2u_{n-1} = \dots \Rightarrow u_n = A^n u_0$
 - 3 Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος $A = P\Lambda P^{-1}$, τότε υπολογίζουμε το A^n μέσω των ιδιοτιμών του : $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$
- Η διαδικασία αυτή μπορεί εφαρμοστεί σε γενικές γραμμικές ΕΔ τάξεως $k \geq 1$.

Η ΕΔ - ακολουθία Fibonacci : I

Εφαρμόζουμε τη παραπάνω διαδικασία στη ΕΔ - ακολουθία Fibonacci :
 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Θέτουμε $u_n = (F_{n+1}, F_n)$, $k = 2$
τότε έχουμε

$$u_{n+1} = Au_n \implies u_n = A^n u_0, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_0 = (F_1, F_0) = (1, 0)$$

Ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος $A = P\Lambda P^{-1}$:

$$\begin{aligned} u_n &= A^n u_0 = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \cdots (P\Lambda P^{-1})u_0 = P\Lambda^n P^{-1}u_0 \\ &= c_1 \lambda_1^n x_1 + \cdots + c_k \lambda_k^n x_k, \quad c = P^{-1}u_0, \end{aligned}$$

με τις στήλες του P τα ιδιοδιανύσματα x_1, \dots, x_k του A . Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A είναι

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_1 = (\lambda_1, 1), \quad x_2 = (\lambda_2, 1),$$

Η ΕΔ - ακολουθία Fibonacci : II

Υπολογίζουμε το c

$$c = P^{-1}u_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(\lambda_1 - \lambda_2) \\ -1/(\lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Όποτε

$$u_n = c_1 \lambda_1^n x_1 + c_2 \lambda_2^n x_2 \implies$$
$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_1^n \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_2^n \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \implies$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n = 0, 1, \dots$$

δηλαδή βρήκαμε ένα κλειστό τύπο για τον γενικό όρο της ακολουθίας Fibonacci!

ΕΔ - 2ο Παράδειγμα

Να βρεθεί η λύση της ΕΔ (γενικός τύπος της ακολουθίας)

$G_{n+2} = (G_{n+1} + G_n)/2$. Θέτουμε $w_n = (G_{n+1}, G_n)$ και γράφουμε την ακολουθία ως σύστημα

$$w_{n+1} = Bw_n \implies w_n = B^n w_0, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad w_0 = (G_1, G_0) = (1, 0)$$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B είναι

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad y_1 = (\lambda_1, 1), \quad y_2 = (\lambda_2, 1)$$

Επίσης ο B είναι διαγωνοποιήσιμος : $B = S\Lambda S^{-1}$ και οι στήλες του S είναι τα ιδιοδιανύσματα του B .

$$w_n = B^n w_0 = S\Lambda^n S^{-1} w_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ΕΔ - 2ο Παράδειγμα - συνέχεια

$$\begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\lambda_1^n \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\lambda_2^n \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{bmatrix} \implies$$

$$G_n = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{(-1)^n}{2^n} \right], \quad n = 0, 1, \dots$$

Διαδικασίες - Αλυσίδες Markov

Αλυσίδες-Διαδικασίες Markov

Διαδικασία-Ιδιότητα Markov

Περιγράφει μια ακολουθία καταστάσεων κατά τη οποία η μετάβαση στη επομένη εξαρτάται αποκλειστικά από την παρούσα κατάσταση και όχι από τις προηγούμενες. (η διαδικασία δεν έχει μνήμη)

Αλυσίδα Markov

Είναι μια διακριτή ακολουθία καταστάσεων όπου η κάθε μια παίρνει διακριτές τιμές και έχουν την ιδιότητα Markov

Τα δεδομένα μια διαδικασίας Markov με n διαφορετικές καταστάσεις περιγράφονται από ένα $n \times n$ πίνακα μετάβασης M . Το στοιχείο M_{ij} περιγράφει την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στη κατάσταση j .

Πίνακας Markov

Ιδιότητες

- Ο πίνακας M είναι τετραγωνικός με θετικά στοιχεία.
- Τα M_{ij} είναι πιθανότητες άρα $0 \leq M_{ij} \leq 1$.
- Το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι 1.

Έστω q το **διάνυσμα κατανομής** με q_i να περιγράφει την πιθανότητα να βρισκόμαστε στη κατάσταση i . Τότε η **αλυσίδα Markov** δίνεται από

$$q^{(k+1)} = Mq^{(k)} \quad k = 0, 1, \dots$$

επόμενη κατάσταση = **πίνακας μετάβασης** \times **παρούσα κατάσταση**

Για πίνακες της μορφής αυτής μπορούν να αποδειχθούν τα εξής :

- 1 το 1 είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του M με αλγεβρική πολλαπλότητα 1
- 2 Όλες οι άλλες ιδιοτιμές του M έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη του 1.
- 3 Για την ιδιοτιμή 1 υπάρχει ιδιοδιάνυσμα του οποίου οι συνιστώσες αθροίζονται σε 1

Διαδικασία Markov - Παράδειγμα(επίκαιρο!)

Έστω ότι υπάρχει μια επιδημία κατά τη οποία κάθε βδομάδα ένα ποσοστό α των υγιών αρρωσταίνει και ένα ποσοστό β των ασθενών απεβιώνουν. Να φτιαχτεί μια κατάλληλη διαδικασία Markov και να βρεθεί μετά από k -εβδομάδες το σύνολο των υγιών(Y), ασθενών(A) και νεκρών(N) ως ποσοστό του συνολικού πληθυσμού P .

- $Y/P, A/P, N/P$ τα ποσοστά υγιών, ασθενών και νεκρών.
- $q = (N/P, A/P, Y/P)$ το διάνυσμα κατανομής.
- $q^{(0)} = (0, 0, 1)$ η αρχική κατανομή (όλοι είναι υγιείς)
- $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$
- Ο πίνακας μετάβασης δίνεται από

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 - \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix}$$

- Το άθροισμα των στοιχείων της κάθε στήλης του M είναι 1.
- Η διαδικασία Markov δίνεται από

$$q^{k+1} = Mq^{(k)} \implies q^{(k)} = M^k q^{(0)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Διαδικασία Markov - Παράδειγμα-Συνέχεια

Οι τιμές του διανύσματος κατανομής μετά από k -εβδομάδες

$$k = 1, \quad q^{(1)} = (0, \alpha, 1 - \alpha)$$

$$k = 2, \quad q^{(2)} = (\beta\alpha, \alpha(2 - \beta - \alpha), (1 - \alpha)^2)$$

$$k = 3, \quad q^{(3)} = (\alpha\beta(3 - \alpha - \beta), \frac{\alpha((\alpha - 1)^3 - (\beta - 1)^3)}{\alpha - \beta}, (1 - \alpha)^3)$$

Οι ιδιοτιμές του M είναι 1 , $1 - \alpha$ $1 - \beta$ και ο M διαγωνοποιείται

$$M = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha - \beta} & -1 \\ 0 & \frac{-\alpha}{\alpha - \beta} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha - \beta} & -1 \\ 0 & \frac{-\alpha}{\alpha - \beta} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Διαδικασία Markov - Παράδειγμα-Συνέχεια

Μετά από από k -εβδομάδες

$$\begin{aligned} q^{(k)} &= M^k q^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha-\beta} & -1 \\ 0 & \frac{-\alpha}{\alpha-\beta} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)^k & 0 \\ 0 & 0 & (1-\beta)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Μετά από k -εβδομάδες το διάνυσμα κατανομής είναι

$$q^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha - \beta - \alpha(1 - \beta)^k + \beta(1 - \alpha)^k}{\alpha - \beta} \\ \frac{-\alpha((1 - \alpha)^k - (1 - \beta)^k)}{\alpha - \beta} \\ (1 - \alpha)^k \end{bmatrix}$$

Διαδικασία Markov - Παράδειγμα με αριθμούς

Έστω ότι κάθε εβδομάδα μολύνεται το $\alpha = 1\%$ του πληθυσμού και το $\beta = 0.3\%$ δεν επιβιώνει. Τότε ο αριθμοί των (N, A, Y) επί του συνολικού πληθυσμού $P = 10^7$ της Ελλάδος είναι οι εξής

$$1\text{η Εβδομάδα: } q^{(1)} = (0, 0.01, 0.99) \Rightarrow (N, A, Y) = (0, 10^5, 0.99 \cdot 10^7)$$

$$2\text{η Εβδομάδα: } q^{(2)} = (3 \cdot 10^{-5}, 0.01987, 0.9801) \\ \Rightarrow (N, A, Y) = (300, 198700, 9801000)$$

$$3\text{η Εβδομάδα: } q^{(3)} = (8.961 \cdot 10^{-5}, 0.02961139, 0.970299) \\ \Rightarrow (N, A, Y) \sim (897, 296113, 9702990)$$

Το παραπάνω είναι ένα πολύ απλοϊκό μοντέλο για την μελέτη επιδημιών.

Ο αλγόριθμος PageRank

Ο αλγόριθμος PageRank

- 1998 : Οι **Sergey Brin, Lawrence Page**, διδακτορικοί φοιτητές στο τμήμα υπολογιστών του πανεπιστημίου Stanford, USA, δημοσιεύουν την εργασία με τίτλο :
The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine, Computer Networks and ISDN Systems. 30 (1-7): 107-117
- ...και η περίφημη μηχανή αναζήτησης του διαδικτύου **Google** γεννιέται!
- **Βασική Ιδέα**: Εκτίμηση του πόσο **σημαντική** είναι μια ιστοσελίδα του δικτύου βασιζόμενη στη διασύνδεση της με το διαδίκτυο:
 - ▶ μια ιστοσελίδα στη οποία αναφέρονται πολλές άλλες είναι πιο σημαντική από μία άλλη στη οποία αναφέρονται λίγες
 - ▶ μια ιστοσελίδα με συνδέσμο από μια ήδη σημαντική ιστοσελίδα είναι και η ίδια σημαντική
- Τα μαθηματικά : Φτιάχνουμε κατάλληλο πίνακα Markov και με την μέθοδο των δυνάμεων προσεγγίζουμε το κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα!!!
- ...δηλαδή η μηχανή αναζήτησης της **Google** δεν είναι τίποτα άλλο από την εύρεση του κυρίαρχου ιδιοδιανύσματος ενός κατάλληλου πίνακα.

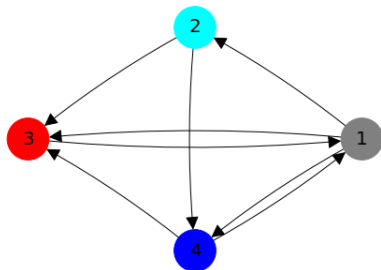
Ο αλγόριθμος PageRank: Γράφος

Έστω ότι υπάρχουν N ιστοσελίδες. Φτιάχνουμε ένα $N \times N$ πίνακα A του οποίου τα στοιχεία είναι

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{L(j)} & \text{αν υπάρχει σύνδεσμος από την σελίδα } j \text{ στη σελίδα } i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου $L(j)$ είναι όλοι οι εξερχόμενοι σύνδεσμοι από την σελίδα j .

Υποθέτουμε ότι έχουμε μόνο 4 ιστοσελίδες οι οποίες συνδέονται όπως φαίνεται στη εικόνα



$$L(1) = 3, L(2) = 2, L(3) = 1, L(4) = 2$$

Ο αλγόριθμος PageRank: Πίνακας

Ο πίνακας A δίνεται από

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A είναι τύπου Markov με κυρίαρχη ιδιοτιμή το 1.

Έστω $x \in \mathbb{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ με $0 \leq x_i \leq 1$ να εκφράζει την *σημαντικότητα* της σελίδα i : $x_i \sim 0$ ελάχιστα σημαντική και $x_i \sim 1$ πάρα πολύ σημαντική. Για την σημαντικότητα κάθε σελίδας έχουμε

$$x_1 = 1 \cdot x_3 + \frac{1}{2} \cdot x_4$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \cdot x_1$$

$$x_3 = \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_4$$

$$x_4 = \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2$$

Ο αλγόριθμος PageRank : Εύρεση ιδιοδιανύσματος

Το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το να βρούμε $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ τέτοιο ώστε

$$Ax = x$$

δηλαδή να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1. Η μέθοδος των δυνάμεων είναι η κατάλληλη για την προσέγγιση του x . Ξεκινώντας με ένα τυχαίο διάνυσμα στον \mathbb{R}^4 η προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος είναι

$$x \approx x_{24} = (0.387, 0.129, 0.29, 0.193)$$

Η κανονικοποίηση στη μέθοδο των δυνάμεων έγινε με την νόρμα $\|\cdot\|_1$ έτσι ώστε τα στοιχεία του ιδιοδιανύσματος να αθροίζονται σε 1. Άρα η σελίδα 1 είναι η πιο σημαντική από όλες, ακολουθεί η 3η μετά η 4η και τέλος η 2η.

Ο αλγόριθμος PageRank : ...Google

Στη πράξη υπάρχουν διάφορα τεχνικά προβλήματα

- Το διαδίκτυο είναι τεράστιο και πολύ ανομοιογενές
- Μεγάλα τμήματα είναι σχεδόν ασύνδετα ή με ελάχιστους συνδέσμους.
- Υπάρχουν ιστοσελίδες οι οποίες περιέχουν μόνο κείμενο και καθόλου εξερχόμενους συνδέσμους.
- Υπάρχουν κομμάτια του διαδικτύου στα οποία αν μπείς δεν μπορείς να βγείς

Λαμβάνοντας τα παραπάνω υπόψη ο πίνακας που φτιάχνει η μηχανή αναζήτησης Google είναι ο εξής

$$M = d \cdot A + \frac{1-d}{N}B, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $d \sim 0.85$, N ο αριθμός ιστοσελίδων και A ο πίνακας που φτιάξαμε παραπάνω.