

5.5 Εσωτερικό γινόμενο

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του συζυγούς, \bar{a} , κατανοώντας ότι εάν το σώμα \mathbb{K} είναι οι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\bar{a} = a$.

Ορισμός 5.7. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ή \mathbb{C}). Μια απεικόνιση

$$V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** εάν

ΕΓ 1. Είναι γραμμική στην πρώτη μεταβλητή, δηλαδή εάν για κάθε $u, v, w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

και

$$\langle av, w \rangle = a \langle v, w \rangle.$$

ΕΓ 2. Για κάθε $v, w \in V$,

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

ΕΓ 3. Για κάθε $v \in V$, εάν $v \neq 0$, τότε $\langle v, v \rangle > 0$.

Εάν $\langle v, w \rangle = 0$, λέμε ότι τα διανύσματα v και w είναι **ορθογώνια**.

Παρατηρούμε ότι εάν το σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, τότε η ιδιότητα ΕΓ 2 σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό, και μαζί με την ΕΓ 1, ότι είναι γραμμικό και στη δεύτερη μεταβλητή.

Αντιθέτως, εάν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, για τη δεύτερη μεταβλητή έχουμε

$$\begin{aligned} \langle v, aw \rangle &= \overline{\langle aw, v \rangle} \\ &= \overline{a \langle w, v \rangle} \\ &= \bar{a} \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.11 Στο \mathbb{R}^n ορίζεται το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο: εάν $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Τα διανύσματα (x_1, x_2) και $(-x_2, x_1)$ είναι ορθογώνια διανύσματα στο \mathbb{R}^2 με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 5.12 Στο \mathbb{C}^n ορίζεται εσωτερικό γινόμενο για $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$,

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i.$$

Δραστηριότητα 5.4 Τα διανύσματα (z_1, z_2) και $(-z_2, z_1)$ δεν είναι ορθογώνια στο \mathbb{C}^2 με αυτό το εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα ορθογώνιο στο (z_1, z_2)

Παράδειγμα 5.13 Θεωρούμε πίνακα $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, και ορίζουμε την απεικόνιση $f : K^2 \times K^2 \rightarrow \mathbb{K}$,

$$f(v, w) = v^T A \bar{w} \quad (5.14)$$

$$= [v_1, v_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$= av_1\bar{w}_1 + bv_1\bar{w}_2 + cv_2\bar{w}_1 + dv_2\bar{w}_2. \quad (5.16)$$

Ελέγξτε ότι ικανοποιείται η ιδιότητα ΕΓ1. Για την ΕΓ2, $aw_1\bar{v}_1 + bw_1\bar{v}_2 + cw_2\bar{v}_1 + dw_2\bar{v}_2 = \bar{a}\bar{v}_1w_1 + \bar{b}\bar{v}_1w_2 + \bar{c}\bar{v}_2w_1 + \bar{d}\bar{v}_2w_2$ πρέπει να απαιτήσουμε $a = \bar{a}$, $d = \bar{d}$ και $c = \bar{b}$. Τέλος, για να ισχύει η ΕΓ3, πρέπει να ισχύει $av_1\bar{v}_1 + bv_1\bar{v}_2 + cv_2\bar{v}_1 + dv_2\bar{v}_2 > 0$ για κάθε $v \in K^2$, $v \neq 0$. Θεωρούμε $v = (1, 0)$ ή $v = (0, 1)$, και έχουμε $a > 0$, $d > 0$. Μπορούμε να δείξουμε ότι f ικανοποιεί την ιδιότητα ΕΓ3 εάν και μόνον εάν $ad - b\bar{b} > 0$. (Δες την Άσκηση 5.10 για την πραγματική περίπτωση.)

Παράδειγμα 5.14 Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(t) \overline{q(t)} dt \quad (5.17)$$

Δραστηριότητα 5.5 Ελέγξτε ότι η 5.17 πράγματι ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Τα πολυώνυμα $p(x) = (x - \frac{1}{2})^2$ και $q(x) = (x - \frac{1}{2})^3$ είναι ορθογώνια:

$$\begin{aligned} \langle p(x), q(x) \rangle &= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 (t - \frac{1}{2})^3 dt \\ &= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^5 dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.15 Στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$, με πραγματικές τιμές, $C[a, b]$, ή με μιγαδικές τιμές, $C_{\mathbb{C}}[a, b]$, ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(s) \overline{g(s)} ds \quad (5.18)$$

Δραστηριότητα 5.6 Ελέγξτε ότι η 5.18 πράγματι ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Οι συναρτήσεις \sin και \cos είναι ορθογώνιες στο $C[0, \pi]$:

$$\int_0^\pi \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2t dt = 0.$$

Θεώρημα 5.4 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει, για κάθε v, w :

$$|\langle v, w \rangle| \leq \sqrt{\langle v, v \rangle} \sqrt{\langle w, w \rangle}.$$

Απόδειξη. Εάν $w = 0$, τότε και οι δύο πλευρές μηδενίζονται και η σχέση επαληθεύεται.

Υποθέτουμε ότι $w \neq 0$ και θεωρούμε, για $a \in \mathbb{K}$, το διάνυσμα $v - aw$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - aw, v - aw \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \langle v, aw \rangle - \langle aw, v \rangle + \langle aw, aw \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \bar{a}\langle v, w \rangle - a\overline{\langle v, w \rangle} + a\bar{a}\langle w, w \rangle. \end{aligned}$$

Ειδικότερα, για $a = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$ έχουμε

$$\langle v, v \rangle \geq \frac{\langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}}{\langle w, w \rangle}$$

ή

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle,$$

και αφού οι πραγματικοί αριθμοί $\langle v, v \rangle$, $\langle w, w \rangle$ και $|\langle v, w \rangle|$ είναι θετικοί ή μηδέν, έχουμε

$$|\langle v, w \rangle| \leq \sqrt{\langle v, v \rangle} \sqrt{\langle w, w \rangle}.$$

□

Ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Cauchy-Schwarz είναι οι ακόλουθες ανισότητες.

Στο χώρο \mathbb{R}^n ή \mathbb{C}^n , με το συνηθές εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Στο χώρο $C[a, b]$, με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(s)g(s)ds$,

$$\left| \int_a^b f(s)g(s)ds \right| \leq \left(\int_a^b (f(s))^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b (g(s))^2 ds \right)^{1/2}.$$

Πρόταση 5.5 Εάν V είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε ορίζεται μία νόρμα στο V :

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη των N 1 και N 2 είναι απλή. Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα N 3, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

και ότι

$$(\|v\| + \|w\|)^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \|w\|.$$

Αλλά από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $\langle v, w \rangle \leq \|v\| \|w\|$ και συνεπώς

$$\|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2.$$

Αφού οι πραγματικοί αριθμοί $\|v + w\|$, $\|v\|$ και $\|w\|$ είναι θετικοί ή μηδέν, έχουμε

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

□

Με τον συμβολισμό της νόρμας, η ανισότητα Cauchy-Schwarz γράφεται στη μορφή

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

Θεωρώντας τη νόρμα ως το μήκος του διανύσματος, μπορούμε να ορίσουμε τη **γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων** σε οποιοδήποτε πραγματικό διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1,$$

και συνεπώς υπάρχει $\vartheta \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε

$$\cos \vartheta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}. \quad (5.19)$$

Αυτός ο ορισμός γωνίας ταιριάζει με την έννοια της ορθογωνιότητας, που έχουμε ορίσει σε οποιοδήποτε χώρο με εσωτερικό γινόμενο, πραγματικό ή μιγαδικό. Όταν $\langle v, w \rangle = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ και τα διανύσματα v και w σχηματίζουν ορθή γωνία.

Στην ευκλείδεια γεωμετρία, ο 'νόμος του παραλληλογράμμου' λέει ότι σε ένα παραλληλόγραμμα, το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων. Όταν το παραλληλόγραμμα είναι ορθογώνιο, αυτό είναι ισοδύναμο με το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Θα δούμε ότι ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει σε κάθε διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση 5.6 Έστω V ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

1. **Νόμος του Παραλληλογράμμου.** Για κάθε $v, w \in V$ ισχύει η ισότητα

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

2. **Πυθαγόρειο Θεώρημα.** Εάν $v_1, \dots, v_k \in V$ και $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ όταν $i \neq j$, τότε

$$\|v_1 + \dots + v_k\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_k\|^2.$$

Απόδειξη. Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο έχουμε $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$. Συνεπώς

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle, \quad (5.20)$$

$$\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w \rangle = \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle. \quad (5.21)$$

Προσθέτοντας τις 5.20 και 5.21 έχουμε τον ‘νόμο του παραλληλογράμμου’.

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\langle v, v \rangle + 2\langle w, w \rangle.$$

Για $k = 2$ το ‘Πυθαγόρειο Θεώρημα’ προκύπτει από την 5.20, αφού $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται με επαγωγή στο k . Αφού $\langle v_1 + \dots + v_{k-1}, v_k \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \|v_1 + \dots + v_k\|^2 &= \|v_1 + \dots + v_{k-1}\|^2 + \|v_k\|^2 \\ &= \|v_1\|^2 + \dots + \|v_{k-1}\|^2 + \|v_k\|^2. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 5.16 Θα δείξουμε ότι η ℓ^1 νόρμα στο \mathbb{R}^2 δεν ικανοποιεί το νόμο του παραλληλογράμμου. Θεωρούμε τα διανύσματα $v = (1, 0)$ και $w = (0, 1)$. Τότε $\|v\|_1 = |1| + |0| = 1$, $\|w\|_1 = 1$, και $\|v + w\|_1 = 2$, $\|v - w\|_1 = 2$. Άρα $2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = 4$ ενώ $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 8$.

Αφού κάθε νόρμα που προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί το Νόμο του Παραλληλογράμμου, συμπεραίνουμε ότι η νόρμα ℓ^1 δεν προκύπτει από εσωτερικό γινόμενο.

5.6 Ορθοκανονικά σύνολα διανυσμάτων

Ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ ονομάζεται **ορθογώνιο** εάν τα στοιχεία του είναι ορθογώνια ανά δύο, δηλαδή εάν για κάθε $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$,

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

Εάν επί πλέον, για κάθε $i = 1, \dots, n$, $\|v_i\| = 1$, το σύνολο ονομάζεται **ορθοκανονικό**. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό δ του Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

βλέπουμε ότι το σύνολο S είναι ορθοκανονικό εάν και μόνον εάν, για κάθε $i, j = 1, \dots, n$,

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Λήμμα 5.7 Ένα ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο, και οι αριθμοί a_1, \dots, a_n είναι τέτοιοι ώστε

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0.$$

Για κάθε $j = 1, \dots, n$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, v_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} \\ &= a_j. \end{aligned}$$

Συνεπώς $a_j = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$, και το σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. □

Ένα ορθοκανονικό σύνολο αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη βάση για το χώρο τον οποίο παράγει. Οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς μία ορθοκανονική βάση δίδονται απλώς από τα εσωτερικά γινόμενα του διανύσματος με τα διανύσματα της βάσης. Πράγματι, εάν $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση, και

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

τότε

$$\begin{aligned} \langle v, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} \\ &= a_j. \end{aligned}$$

Σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση, εφαρμόζοντας τη διαδικασία **ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt**.

Θεώρημα 5.8 (Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt) Θεωρούμε χώρο V με εσωτερικό γινόμενο, και ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\}$. Τότε υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο $\{e_1, \dots, e_n\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i = 1, \dots, n$

$$e_i \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle$$

και

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle.$$

Στην απόδειξη του Θεωρήματος ο συμβολισμός $\langle \dots \rangle$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει τόσο το εσωτερικό γινόμενο όσο και τον παραγόμενο υπόχωρο, αλλά η διάκριση είναι συνήθως εύκολη από τα συμφραζόμενα.

Απόδειξη. Για κάθε j ορίζουμε πρώτα το διάνυσμα e'_j ορθογώνιο προς τα e_i για $i = 1, \dots, j-1$, και μετά διαιρούμε με τη νόρμα του e'_j για να πάρουμε το μοναδιαίο διάνυσμα e_j . ένα σύνολο μη μηδενικών ορθογωνίων διανυσμάτων e'_1, \dots, e'_n , και στη συνέχεια θα ορίσουμε τα μοναδιαία διανύσματα

$$e_i = \frac{1}{\|e'_i\|} e'_i.$$

Αφού τα $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $v_1 \neq 0$, και ορίζουμε

$$e'_1 = v_1, \quad e_1 = \frac{1}{\|e'_1\|} e'_1.$$

Το e'_2 προκύπτει από το v_2 αφαιρώντας κατάλληλο πολλαπλάσιο του e_1 ώστε e'_2 να είναι ορθογώνιο προς το e_1 .

$$e'_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1.$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} \langle e'_2, e_1 \rangle &= \langle v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1, e_1 \rangle \\ &= \langle v_2, e_1 \rangle - \langle v_2, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αφού τα e_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $e'_2 \neq 0$ και μπορούμε να διαιρέσουμε το e'_2 με τη νόρμα του για να πάρουμε το μοναδιαίο

$$e_2 = \frac{1}{\|e'_2\|} e'_2.$$

Παρατηρούμε ότι τα e_1, e_2 παράγουν τον ίδιο υπόχωρο που παράγουν τα v_1, v_2 .

Στη συνέχεια, για $j = 3, \dots, n$, ορίζουμε αναδρομικά τα μη μηδενικά διανύσματα

$$e'_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle e_i, \quad (5.22)$$

τα οποία ικανοποιούν $\langle e_i, e'_j \rangle = 0$ για $i = 1, \dots, j-1$. Το e'_j δεν είναι μηδενικό, άρα μπορούμε να το διαιρέσουμε με τη νόρμα του για να πάρουμε το διάνυσμα

$$e_j = \frac{1}{\|e'_j\|} e'_j.$$

Από την 5.22 είναι φανερό ότι

$$e_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$$

και ότι

$$v_j \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle.$$

Συνεπώς, για κάθε $j = 1, \dots, n$

$$\langle e_1, \dots, e_j \rangle = \langle v_1, \dots, v_j \rangle.$$

□

Παρατήρηση Όταν κάνουμε υπολογισμούς με το χέρι, είναι συχνά προτιμότερο να υπολογίσουμε όλα τα e'_j , ακολουθώντας τη διαδικασία Gram – Schmidt όπως την περιγράψαμε στο Παράδειγμα 1.9, και στο τέλος να διαιρέσουμε κάθε διάνυσμα e'_j με τη νόρμα του. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε να μεταφέρουμε σε όλη τη διαδικασία τις τετραγωνικές ρίζες που προκύπτουν από τη νόρμα.

Πολυώνυμα Legendre

Η συνήθης βάση του χώρου των πολυωνύμων, $\{1, x, x^2, \dots\}$, δεν είναι ορθογώνια για οποιοδήποτε εσωτερικό γινόμενο της μορφής $\langle p, q \rangle = \int_a^b p(t)q(t)dt$.

Για να ορίσουμε μία ορθοκανονική οικογένεια πολυωνύμων, που θα μας επιτρέπει να προσεγγίζουμε συναρτήσεις από τις προβολές τους στα στοιχεία αυτής της οικογένειας, διευκολύνει να χρησιμοποιήσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται στο διάστημα $[-1, 1]$. Με αυτή την επιλογή, κάθε άρτιο πολυώνυμο, για το οποίο $p(x) = p(-x)$, είναι εξ αρχής ορθογώνιο σε κάθε περιττό πολυώνυμο, για το οποίο $p(x) = -p(-x)$.

Θεωρούμε λοιπόν το εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathbb{R}[x]$,

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt,$$

και τα πολυώνυμα $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, \dots, p_n(x) = x^n, \dots$

Ορίζουμε

$$w_0(x) = p_0(x) = 1.$$

Έχουμε $\langle p_1, w_0 \rangle = \int_{-1}^1 t dt = 0$. Άρα

$$w_1(x) = p_1(x) - \frac{\langle p_1, w_0 \rangle}{\langle w_0, w_0 \rangle} w_0(x) = x.$$

Για να βρούμε το w_2 , υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα

$$\begin{aligned}\langle p_2, w_1 \rangle &= \int_{-1}^1 t^3 dt = 0, \\ \langle p_2, w_0 \rangle &= \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}, \\ \langle w_0, w_0 \rangle &= \int_{-1}^1 1 dt = 2, \\ \langle w_1, w_1 \rangle &= \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}w_2(x) &= p_2(x) - \frac{\langle p_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1(x) - \frac{\langle p_2, w_0 \rangle}{\langle w_0, w_0 \rangle} w_0(x) \\ &= x^2 - \frac{2/3}{2} = x^2 - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

και

$$\langle w_2, w_2 \rangle = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dt = \frac{8}{45}.$$

Όταν διαιρέσουμε τα w_0, w_1, w_2 με τη νόρμα τους, έχουμε

$$\begin{aligned}q_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ q_1(x) &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x, \\ q_2(x) &= \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} (3x^2 - 1).\end{aligned}$$

Αυτά συνδέονται με τα πολυώνυμα Legendre,

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m.$$

Για $m = 0, \dots, n-1$, τα πολυώνυμα

$$q_m(x) = \sqrt{\frac{2m+1}{2}} P_m(x)$$

είναι η ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ που προκύπτει με τη διαδικασία Gram – Schmidt, για το εσωτερικό γινόμενο στο διάστημα $[-1, 1]$, από τη συνήθη βάση $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$.

Άσκηση 5.1 Θεωρούμε διανύσματα $v = (v_1, v_2)$ και $w = (w_1, w_2)$ στο \mathbb{R}^2 .

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$(v, w) = 4v_1w_1 + 9v_2w_2$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο \mathbb{R}^2 .

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$(v, w) = 2v_1w_1 - v_2w_2$$

δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 5.2 Θεωρούμε το χώρο $C[0, 1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$, με εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

1. Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x - 2$.
2. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 4x - 3$ είναι ορθογώνιες.
3. Βρείτε μία συνάρτηση ορθογώνια προς την $f(x) = 6x + 12$

Άσκηση 5.3 Θεωρούμε το μιγαδικό διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^2 , με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε τα (u, v) , $\|u\|$, $\|v\|$ και την απόσταση $d(u, v) = \|u - v\|$ για τα διανύσματα:

1. $u = (2 - i, 3 + 2i)$, $v = (3 - 2i, 2 + i)$.
2. $u = (2 - 3i, -2 + 3i)$, $v = (1, 1)$.

Άσκηση 5.4 Στο χώρο \mathbb{R}^3 , με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, βρείτε την ορθοκανονική βάση που προκύπτει από την εφαρμογή της διαδικασίας Gram-Schmidt στη βάση

$$\{(1, 1, 0), (2, 1, 0), (0, 1, 2)\}.$$

Άσκηση 5.5 Θεωρήστε θετική συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι εάν $p(x), q(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε

$$\langle p, q \rangle_f = \int_0^1 f(t)p(t)q(t)dt,$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Εάν $f(x) = x + 1$, βρείτε ορθοκανονική βάση για το χώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 1, με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$.

Άσκηση 5.6 Βρείτε όλα τα διαφορετικά εσωτερικά γινόμενα που ορίζονται σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης 2 πάνω από το \mathbb{R} .

Άσκηση 5.7 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το \mathbb{R} , με εσωτερικό γινόμενο, και δύο διαφορετικά διανύσματα $a, b \in V$. Αποδείξτε ότι εάν $x \in V$ και $\|x - a\| + \|x - b\| = \|a - b\|$, τότε $x = \lambda a + \mu b$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda + \mu = 1$.

Άσκηση 5.8 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^3 , με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.

1. Επαληθεύστε ότι τα διανύσματα

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, -3), v_3 = (5, -4, -1)$$

είναι ανά δύο ορθογώνια, και βρείτε μία ορθοκανονική βάση του V , διαφορετική από την κανονική.

2. Βρείτε τα μοναδιαία διανύσματα τα οποία είναι ταυτόχρονα ορθογώνια με τα $v_1 - v_2$ και $v_1 + v_3$.
3. Βρείτε τα διανύσματα τα οποία είναι ορθογώνια στο $2v_2 + v_3$ και ανήκουν στον γραμμικό υπόχωρο που παράγεται από τα $v_1 - v_2, v_1 + v_3$.

Άσκηση 5.9 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^4 με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, και τον υπόχωρο X που παράγεται από τα διανύσματα $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ και $u_2 = (0, 1, -1, 1)$.

Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος X^\perp , και συμπληρώστε την σε μια ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^4 .