Γραμμική Άλγεβρα Ι

Διάλεξη 8

Θεώρημα Cayley – Hamilton.

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2019

Θεώρημα Cayley – Hamilton

Θεώρημα (Cayley – Hamilton)

Εάν $\chi_L(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ *είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή* L*, σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης* V*, τότε ο τελεστής*

$$\chi_L(L) = b_n L^n + \cdots + b_1 L + b_0 \mathbf{I}_V$$

είναι ο μηδενικός τελεστής:

$$\text{για κάθε } v \in V,\ \chi_L(L)(v) = 0.$$

Υπολογισμός

Στην απόδειξη του Θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix}.$$

Υπολογισμός

$$\chi_B(x) = \det(B - x\mathrm{I}_k) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -x & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x & a_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix}.$$

Υπολογισμός

Υπολογίζουμε την ορίζουσα με απαλοιφή των x στη διαγώνιο από κάτω προς τα πάνω:

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 + a_2 x + \cdots + a_k x^{k-1} - x^k \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 + a_3 x + \cdots + a_k x^{k-2} - x^{k-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} + a_k x - x^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix}.$$

Υπολογισμός

Αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή και βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$
\begin{aligned}
\chi_B(x) &= \det(B - x\mathrm{I}) \\
&= (-1)^{k+1}(a_1 + a_2 x + \cdots + a_k x^{k-1} - x^k) \\
&= (-1)^k (x^k - a_k x^{k-1} - \cdots - a_2 x - a_1)\,.
\end{aligned}
$$

Θεώρημα Cayley – Hamilton

Θεώρημα (Cayley – Hamilton)

Εάν $\chi_L(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ *είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή* L*, σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης* V*, τότε ο τελεστής*

$$\chi_L(L) = b_n L^n + \cdots + b_1 L + b_0 \mathbf{I}_V$$

είναι ο μηδενικός τελεστής: για κάθε $v \in V$, $\chi_L(L)(v) = 0$.

Πόρισμα

Εάν A *είναι τετραγωνικός* $n \times n$ *πίνακας και* $\chi_A(x) = \det(A - x\mathrm{I}_n)$ *είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* A*, τότε ο πίνακας* $\chi_A(A)$ *είναι ο μηδενικός* $n \times n$ *πίνακας.*

Απόδειξη Θεωρήματος Cayley – Hamilton

Κατασκευάζουμε βάση του V,

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\},$$

τέτοια ώστε για $i = 1, \ldots, k-1$,

$$v_{i+1} = L(v_i),$$

και

$$L(v_k) = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k.$$

Απόδειξη Θεωρήματος Cayley – Hamilton

Ο υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ είναι αναλλοίωτος από τον L. Άρα ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει τη μορφή

$$ {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}. $$

και

$$ \chi_L(x) = \chi_A(x)\chi_D(x). $$

Απόδειξη Θεωρήματος Cayley – Hamilton

Αφού για $i = 1, \ldots, k-1$, $v_{i+1} = L(v_i)$, το πάνω αριστερά μπλοκ του πίνακα έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix}.$$

Απόδειξη Θεωρήματος Cayley – Hamilton

Από τον προηγούμενο υπολογισμό, έχουμε

$$\chi_A(x) = (-1)^k (x^k - a_k x^{k-1} - \cdots - a_2 x - a_1)\,.$$

Θέτουμε $x = L$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
\chi_A(L)(v) &= (-1)^k (L^k(v_1) - a_k L^{k-1}(v_1) - \cdots - a_2 L(v_1) - a_1 v_1) \\
&= (-1)^k (L(v_k) - a_k v_k - \cdots - a_2 v_2 - a_1 v_1) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Απόδειξη Θεωρήματος Cayley – Hamilton

Αλλά ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων είναι μεταθετικός

$$\chi_L(x) = \chi_A(x)\chi_D(x) = \chi_D(x)\chi_A(x)\,,$$

και συνεπώς

$$\chi_L(L)(v) = \chi_D(L) \circ \chi_A(L)(v) = 0\,.$$

□

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον τελεστή $L(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$ με πίνακα ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

και χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_L(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4\,.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Cayley - Hamilton, ο τελεστής $\chi_L(L)$ είναι ο μηδενικός τελεστής και ο πίνακας $\chi_A(A) = 0$.
Πράγματι

$$\chi_A(A) = A^2 - 3A - 4\mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Παράδειγμα

Το Θεώρημα Cayley - Hamilton επιτρέπει να απλοποιούμε παραστάσεις με πίνακες, ή να εκφράζουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα ως πολυώνυμο.

Αφού $A^2 = 3A + 4\mathrm{I}_2$,

$$\begin{aligned} A^3 &= 3A^2 + 4A = 3(3A + 4\mathrm{I}_2) + 4A = 13A + 12\mathrm{I}_2\,, \\ A^4 &= 13A^2 + 12A = 13(3A + 4\mathrm{I}_2) + 12A = 51A + 52\mathrm{I}_2\,, \ \text{κ.ο.κ.} \end{aligned}$$

Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ δεν είναι μηδέν, το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, και ο A είναι αντιστρέψιμος.
Αφού $A^2 - 3A = 4\mathrm{I}_2$, έχουμε $A - 3\mathrm{I}_2 = 4A^{-1}$ και συνεπώς $A^{-1} = \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}\mathrm{I}_2$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 7 .$$

Από το Θεώρημα Cayley – Hamilton υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} A^3 &= 5A^2 - 8A + 7\mathrm{I}_3 , \\ A^4 &= AA^3 = 5A^3 - 8A^2 + 7A \\ &= 17A^2 - 33A + 35\mathrm{I}_3 , \\ A^5 &= 5A^4 - 8A^3 + 7A^2 \\ &= 5(17A^2 - 33A + 35\mathrm{I}_3) - 8(5A^2 - 8A + 7\mathrm{I}_3) + 7A^2 . \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Με αυτή τη διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε και αρνητικές δυνάμεις ενός πίνακα εάν αυτός είναι αντιστρέψιμος.

Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ δεν είναι μηδέν, μπορούμε να εκφράσουμε το A^{-1} ως πολυώνυμο του A:

$$A^2 = A^3 A^{-1} = (5A^2 - 8A + 7\mathrm{I}_3)A^{-1} = 5A - 8\mathrm{I}_3 + 7A^{-1}\,.$$

Άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{7}(A^2 - 5A + 8\mathrm{I}_3)\,.$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$p(x) = x^8 - 17x^6 + 33x^5 - 36x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 7x + 1\,.$$

Το διαιρούμε με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$:

$$p(x) = \chi_A(x)(-x^5 - 5x^4 + x) + 2x^2 + 1\,.$$

Αφού $\chi_A(A) = 0$, έχουμε $p(A) = 2A^2 + \mathrm{I}_3$,δηλαδή

$$p(A) = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 8 & 11 & 2 \\ 6 & 18 & 5 \end{bmatrix}.$$