Γραμμική Άλγεβρα Ι

Διάλεξη 7

Τριγωνοποίηση.

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2019

Τριγωνικός πίνακας

Πρόταση

Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \to V$, *και βάση* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *του* V. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο πίνακας* A *της* L *ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$ *είναι άνω τριγωνικός*
2. $L(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ *για* $j = 1, \ldots, n$.
3. *Για κάθε* $j = 1, \ldots, n$ *ο υπόχωρος* $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ *είναι αναλλοίωτος από τον* L.

Τριγωνοποίηση

Ορισμός.

Ένας $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία στο $\mathbb{K}$ είναι **τριγωνοποιήσιμος (πάνω από το $\mathbb{K}$)** εάν είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα U, δηλαδή εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας R με στοιχεία στο $\mathbb{K}$ τέτοιος ώστε $A = RUR^{-1}$.

Ένας τελεστής $L : V \longrightarrow V$ είναι **τριγωνοποιήσιμος** εάν υπάρχει μία διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι άνω τριγωνικός.

Ιδιοτιμές Τριγωνικού πίνακα

Πρόταση

Υποθέτουμε οτι ο τελεστής $L : V \longrightarrow V$ είναι τριγωνοποιήσιμος. Τότε οι ιδιοτιμές του L είναι ακριβώς τα στοιχεία της διαγωνίου του τριγωνικού πίνακα που παριστάνει τον L.

Τριγωνοποίηση πάνω από το $\mathbb{C}$

Θεώρημα

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Τότε ο τελεστής L είναι τριγωνοποιήσιμος.

Θεώρημα

Κάθε τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{C}$ είναι τριγωνοποιήσιμος.

Παράδειγμα

Παράδειγμα Στο χώρο $\mathbb{C}_3[x]$ των πολυωνύμων βαθμού ίσου ή μικρότερου από 3, με την κανονική διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$, ο τελεστής παραγώγισης $D : \mathbb{C}_3[x] \longrightarrow \mathbb{C}_3[x]$ παριστάνεται από τον πίνακα

$$_{\mathcal{B}}D_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Για να τον μετατρέψουμε σε άνω τριγωνικό αρκεί μία αναδιάταξη της βάσης, $\mathcal{F} = \{1, x, x^2, x^3\}$.
Θα συγκρίνουμε με το αποτέλεσμα της διαδικασίας της απόδειξης του Θεωρήματος για να τριγωνοποιήσουμε τον τελεστή D.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ο D έχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda = 0$, με ιδιοδιάνυσμα το σταθερό πολυώνυμο 1. Επιλέγουμε ως πρώτο στοιχείο της βάσης αυτό το πολυώνυμο, και θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{C} = \{1, x^3, x^2, x\}$ ως προς την οποία ο πίνακας του τελεστή D είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο κάτω δεξιά 3×3 πίνακας παριστάνει τον τελεστή $M : \langle x^3, x^2, x \rangle \longrightarrow \langle x^3, x^2, x \rangle$ που απεικονίζει τα x^3, x^2, x στα $3x^2, 2x, 0$ αντίστοιχα.
Ως προς τη βάση $\mathcal{W} = \{x, x^2, x^3\}$ ο M έχει άνω τριγωνικό πίνακα.
Ως προς τη βάση $\{1, x, x^2, x^3\}$ ο πίνακας του τελεστή D είναι άνω τριγωνικός, που επαληθεύει το προηγούμενο αποτέλεσμα.

Τριγωνοποίηση πάνω από το $\mathbb{R}$

Για να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία όταν το σώμα δεν είναι το $\mathbb{C}$, χρειαζόμαστε μία επιπλέον υπόθεση:

Θεώρημα

Θεωρούμε $n \times n$ πίνακα A με στοιχεία στο $\mathbb{K}$. Τότε ο A είναι τριγωνοποιήσιμος εάν και μόνον εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)$ είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1 πάνω από το $\mathbb{K}$.