Κεφάλαιο 1

Διανυσματικοί Χώροι

Στο εισαγωγικό μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας ξεκινήσαμε μελετώντας συστήματα εξισώσεων πρώτου βαθμού, και σιγά-σιγά, χρησιμοποιώντας ως βασικό εργαλείο την απαλοιφή Gauss, χτίσαμε ένα αρκετά πολύπλοκο οικοδόμημα:

- διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ και πράξεις με διανύσματα
- πίνακες και πράξεις με πίνακες
- παραγοντοποίηση και αντιστροφή πινάκων
- γραμμικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$
- γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία
- διάσταση γραμμικού υπόχωρου
- τάξη πίνακα
- θεμελιώδεις υπόχωροι ενός πίνακα, και βάσεις τους
- γραμμικές απεικονίσεις
- ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα
- ορθογωνιότητα

Όμως όλα αυτά είναι απόλυτα συγκεκριμένα: αναφέρονται σε n-άδες πραγματικών αριθμών. Ποιές είναι οι θεμελιώδεις ιδιότητες, που είναι απαραίτητες για να αναπτύξουμε τη θεωρία, και ποιές είναι απλώς ιδιαιτερότητες των n-άδων πραγματικών αριθμών, που δεν επηρεάζουν ουσιαστικά το οικοδόμημα;

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη βασική διαδικασία της απαλοιφής Gauss, χρειάζεται να μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα και να τα πολλαπλασιάζουμε ή να τα διαιρούμε με αριθμούς. Υπάρχουν άλλα μαθηματικά αντικείμενα με τα οποία μπορούμε να κάνουμε αυτές τις πράξεις; Εύκολα βρίσκουμε κάποια παραδείγματα:

- πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές: εάν $p(x)$ και $q(x)$ είναι πολυώνυμα, και c είναι πραγματικός αριθμός, τότε $p(x) + q(x)$ και $cp(x)$ είναι επίσης πολυώνυμα.

- ακολουθίες πραγματικών αριθμών: εάν a_n και b_n είναι ακολουθίες, $a_n + b_n$ και ca_n είναι επίσης ακολουθία.
- συναρτήσεις από ένα σύνολο X στους πραγματικούς αριθμούς: εάν $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : X \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις, τότε $f + g$, που ορίζεται ως $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, και cf, που ορίζεται ως $(cf)(x) = cf(x)$, είναι επίσης συναρτήσεις από το X στο $\mathbb{R}$.

Θα μπορούσαμε, αντί για τους πραγματικούς αριθμούς, να χρησιμοποιήσουμε τους ακέραιους ή τους μιγαδικούς; Με τους ακέραιους δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε διαίρεση, που είναι απαραίτητη στην απαλοιφή Gauss. Ποιές ιδιότητες των πραγματικών χρειαζόμαστε; Αν σκεφτούμε λίγο, βλέπουμε οτι για την απαλοιφή Gauss χρησιμοποιούμε όλες τις συνηθισμένες ιδιότητες των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής, αλλά δεν χρησιμοποιούμε τη διάταξη των πραγματικών αριθμών. Χρησιοποιούμε τις ιδιότητες ενός *αλγεβρικού σώματος*.

Αλγεβρικά σώματα

Ένα **αλγεβρικό σώμα** είναι ένα σύνολο $\mathbb{K}$ στο οποίο ορίζονται δύο διμελείς πράξεις, τις οποίες ονομάζουμε **πρόσθεση** και **πολλαπλασιασμό**,

$$(a, b) \mapsto a + b \quad \text{και} \quad (a, b) \mapsto ab$$

και οι οποίες ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα.

ΑΣ1. Η προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b, c \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad (ab)c = a(bc)$$

ΑΣ2. Η αντιμεταθετική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$a + b = b + a \quad , \quad ab = ba$$

ΑΣ3. Η επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης ως προς τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b, c \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$a(b + c) = ab + ac$$

ΑΣ4. Υπάρχουν στοιχεία $0 \in \mathbb{K}$ και $1 \in \mathbb{K}$, τέτοια ώστε για κάθε $a \in \mathbb{K}$,

$$a + 0 = a \quad \text{και} \quad a1 = a$$

ΑΣ5. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $a + b = 0$. Το μοναδικό στοιχείο b με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται $-a$ και ονομάζεται *αντίθετο* του a.

ΑΣ6. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $ab = 1$. Το μοναδικό στοιχείο b με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται a^{-1} και ονομάζεται *αντίστροφο* του a.

Παράδειγμα 1.1 Οι ρητοί αριθμοί, $\mathbb{Q}$, οι πραγματικοί αριθμοί, $\mathbb{R}$, και οι μιγαδικοί αριθμοί, $\mathbb{C}$, με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αποτελούν αλγεβρικά σώματα. Οι ακέραιοι αριθμοί δεν αποτελούν σώμα, καθώς δεν ικανοποιείται το αξίωμα (ΑΣ6).

Παράδειγμα 1.2 Το σύνολο $\mathbb{Z}_3$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 3 με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό modulo 3 (δες Θεμέλια των Μαθηματικών, Κεφάλαιο 2), αποτελεί ένα σώμα. Γενικότερα, για κάθε πρώτο αριθμό p, το σύνολο $\mathbb{Z}_p$ των κλάσεων υπολοίπων modulo p αποτελεί ένα σώμα.

Άσκηση 1.1 Αποδείξτε οτι το σύνολο $\mathbb{Z}_6$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 6, δεν είναι αλγεβρικό σώμα.
Υπόδειξη: Εξετάστε εάν το στοιχείο 3_6 έχει αντίστροφο.

Παράδειγμα 1.3 Το σύνολο των ρητών αριθμών επεκτεταμένο με την τετραγωνική ρίζα του 2, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a,\, b \in \mathbb{Q}\}$, αποτελεί ένα σώμα.

Άσκηση 1.2 Επαληθεύσατε οτι οι πράξεις της πρόθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι καλά ορισμένες στο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, δηλαδή οτι το άθροισμα και το γινόμενο δύο στοιχείων του $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι επίσης στοιχείο του $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Βρείτε το αντίστροφο του $a + b\sqrt{2}$ όταν $b \neq 0$.

Θα δούμε πώς χρησιμοποιώντας τα αξιώματα μπορούμε να αποδείξουμε άλλες ιδιότητες ενός σώματος.

Λήμμα 1.1 *Σε ένα σώμα $\mathbb{K}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $0a = a0 = 0$.*

2. *Εάν $a,\, b \in \mathbb{K}$ και $ab = 0$, τότε είτε $a = 0$ είτε $b = 0$.*

3. *Για κάθε $a,\, b \in \mathbb{K}$ ισχύει $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.*

Απόδειξη. 1. Αφού $0 = 0 + 0$, έχουμε $0a = (0 + 0)a$, και από την επιμεριστική ιδιότητα $0a = 0a + 0a$. Προσθέτουμε και στις δύο πλευρές το αντίθετο του $0a$, και έχουμε

$$\begin{aligned} 0a + (-0a) &= (0a + 0a) + (-0a) \\ 0 &= 0a + (0a + (-0a)) \\ 0 &= 0a + 0 \\ 0 &= 0a\,. \end{aligned}$$

Από την αντιμεταθετική ιδιότητα έχουμε επίσης $0 = a0$.
2. Έστω $ab = 0$ και $a \neq 0$. Τότε, από τα αξιώματα (ΑΣ6) και (ΑΣ1), έχουμε $a^{-1}(ab) = (aa^{-1})b = 1b = b$. Αλλά αφού $ab = 0$, από το (1) έχουμε $a^{-1}(ab) = a0 = 0$. Άρα $b = 0$.
3. Από το αξίωμα (ΑΣ3) έχουμε $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a0 = 0$. Άρα $a(-b)$ είναι το αντίθετο του ab, το $-(ab)$, και παρόμοια για το $(-a)b$.

□

Αξιώματα Διανυσματικού Χώρου

Θεωρούμε ένα αλγεβρικό σώμα $\mathbb{K}$. Ένα σύνολο V, με δύο πράξεις

$$\alpha : V \times V \to V \qquad \alpha(v, w) = v \dot{+} w$$

και

$$\mu : \mathbb{K} \times V \to V \qquad \mu(a, v) = a \cdot v$$

ονομάζεται **διανυσματικός χώρος πάνω από το** $\mathbb{K}$ εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα.

ΔΧ1. Για κάθε $v, w \in V, \quad v \dot{+} w = w \dot{+} v$.

ΔΧ2. Για κάθε $v, w, u \in V, \quad (v \dot{+} w) \dot{+} u = v \dot{+} (w \dot{+} u)$.

ΔΧ3. Υπάρχει στοιχείο $\bar{0} \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in V, \quad v \dot{+} \bar{0} = v$.

ΔΧ4. Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε $u \dot{+} w = \bar{0}$.

ΔΧ5. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και $v \in V, \quad a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$.

ΔΧ6. Για κάθε $v \in V$ ισχύει $1 \cdot v = v$.

ΔΧ7. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και $v, w \in V, \quad a \cdot (v \dot{+} w) = a \cdot v \dot{+} a \cdot w$.

ΔΧ8. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και $v, \in V, \quad (a + b) \cdot v = a \cdot v \dot{+} b \cdot v$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται **διανύσματα**.

Παράδειγμα 1.4 Τα σύνολα $\mathbb{R}^n$ για $n = 1, 2, 3, \dots$, με τις συνηθισμένες πράξεις, είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Τα σύνολα $\mathbb{C}^n$ για $n = 1, 2, 3, \dots$, με τις συνηθισμένες πράξεις, είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 1.5 Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συμβολίζεται $C^0(\mathbb{R})$. Σε αυτό ορίζουμε την πρόσθεση δύο συναρτήσεων κατά σημείο, $(f \dot{+} g)(x) = f(x) + g(x)$, και τον πολλαπλασιασμό μίας συνάρτησης με έναν αριθμό επίσης κατά σημείο $(c \cdot f)(x) = cf(x)$. Είναι γνωστό οτι εάν f και g είναι συνεχείς, τότε $f \dot{+} g$ και $c \cdot f$ είναι επίσης συνεχείς. Το σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ με αυτές τις πράξεις είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.6 Θεωρούμε το σύνολο των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο με σημείο εφαρμογής στο O (δες τις σημειώσεις του μαθήματος Επίπεδο και Χώρος, Κεφάλαιο 1). Σε αυτό το σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε $T_O E^2$, ορίζεται το άθροισμα γεωμετρικών διανυσμάτων, $\vec{v} + \vec{w}$, και το γινόμενο ενός γεωμετρικού διανύσματος με έναν αριθμό, $c\vec{v}$. Με αυτές τις πράξεις $T_O E^2$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, και ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος του E^2 στο σημείο O.

Παράδειγμα 1.7 Ας δούμε κάποια παραδείγματα συνόλων που δεν είναι διανυσματικοί χώροι.

1. Το ημιεπίπεδο $\mathcal{H} = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\}$. Το άθροισμα δύο στοιχείων του $\mathcal{H}$ ορίζεται κανονικά. Όμως δεν υπάρχει το αντίθετο ενός στοιχείου: το $(-x,\, -y)$ δεν ανήκει στο $\mathcal{H}$.

2. Το σύνολο των σημείων στο επίπεδο με ακέραιες συντεταγμένες, $\mathbb{Z}^2 = \{(m,\, n) \in \mathbb{R}^2 \,:\, m,\, n \in \mathbb{Z}\}$. Εδώ ορίζεται η πρόσθεση και ικανοποιούνται τα αξιώματα ΔΧ1, ..., ΔΧ4. Όμως δεν ορίζεται ο πολλαπλασιασμός με μή ακέραιο αριθμό: $\frac{1}{2} \cdot (3,\, 5) \notin \mathbb{Z}^2$.

Πρώτα αποτελέσματα από τα αξιώματα.

Το μηδενικό διάνυσμα ενός χώρου είναι μοναδικό, όπως βλέπουμε εάν υποθέσουμε οτι $\tilde{0}$ είναι ένα στοιχείο με την ιδιότητα (ΔΧ3). Τότε $\tilde{0} = \bar{0} \dotplus \tilde{0} = \bar{0}$.

Λήμμα 1.2 *Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, με πράξεις $\dotplus$ και $\cdot$.*

1. *Το γινόμενο ενός αριθμού $a \in \mathbb{K}$, και ενός διανύσματος $v \in V$, είναι το μηδενικό διάνυσμα εάν και μόνον εάν $a = 0$ ή $v = 0$.*

   Πιο αναλυτικά, για κάθε $v \in V$, $\quad 0 \cdot v = \bar{0}$, και για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $\quad a \cdot \bar{0} = \bar{0}$, και αντίστροφα, για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και για κάθε $v \in V$, εάν $a \cdot v = \bar{0}$, τότε $a = 0$ ή $v = \bar{0}$.

2. *Το αντίθετο ενός διανύσματος $v \in V$ είναι μοναδικό, και ίσο με $(-1) \cdot v$.*

Απόδειξη. Για το 1, θεωρούμε ένα διάνυσμα $v \in V$, και τον αριθμό μηδέν, $0 \in \mathbb{K}$. Θα δείξουμε οτι $0 \cdot v = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (0 + 0) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \dotplus 0 \cdot v \end{aligned}$$

Έστω w ένα αντίθετο του διανύσματος $0 \cdot v$, δηλαδή $0 \cdot v \dotplus w = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 \cdot v \dotplus w \\ &= (0 \cdot v \dotplus 0 \cdot v) \dotplus w \\ &= 0 \cdot v \dotplus (0 \cdot v \dotplus w) \\ &= 0 \cdot v \dotplus \bar{0} \\ &= 0 \cdot v \end{aligned}$$

Θεωρούμε έναν αριθμό $a \in \mathbb{K}$, και το μηδενικό διάνυσμα $\bar{0} \in V$. Θα δείξουμε οτι $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{0} &= a \cdot (\bar{0} \dotplus \bar{0}) \\ &= a \cdot \bar{0} \dotplus a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Έστω u ένα αντίθετο του διανύσματος $a \cdot \bar{0}$, δηλαδή $a \cdot \bar{0} + u = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= a \cdot \bar{0} \dotplus u \\ &= (a \cdot \bar{0} \dotplus a \cdot \bar{0}) \dotplus u \\ &= a \cdot \bar{0} \dotplus (a \cdot \bar{0} \dotplus u) \\ &= a \cdot \bar{0} \dotplus \bar{0} \\ &= a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Αντίστροφα, εάν $a \neq 0$ και $a \cdot v = \bar{0}$, τότε

$$v = 1 \cdot v = (a^{-1}a) \cdot v = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = a^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}\,.$$

Για το 2, υποθέτουμε οτι w και w' είναι αντίθετα του $v \in V$, και θα δείξουμε οτι $w = w'$. Έχουμε οτι $v \dotplus w = \bar{0} = v \dotplus w'$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} w &= w \dotplus \bar{0} \\ &= w \dotplus (v \dotplus w') \\ &= (w \dotplus v) \dotplus w' \\ &= (v \dotplus w) \dotplus w' \\ &= \bar{0} \dotplus w' \\ &= w' \dotplus \bar{0} \\ &= w' \end{aligned}$$

Τώρα δείχνουμε οτι το γινόμενο $(-1) \cdot v$ είναι αντίθετο του v:

$$\begin{aligned} v \dotplus ((-1) \cdot v) &= (1 \cdot v) \dotplus ((-1) \cdot v) \\ &= (1 + (-1)) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

Το μοναδικό αντίθετο του v συμβολίζουμε $-v$.

□

Γενικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα 1.8 Διατεταγμένες $n-$άδες στοιχείων του σώματος $\mathbb{K}$, ή ενός διανυσματικού χώρου V πάνω από το $\mathbb{K}$.

Θεωρούμε το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων στοιχείων του $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K},\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα, δηλαδή εάν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$x \dotplus y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

και

$$a \cdot x = (ax_1, \ldots, ax_n)$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι το $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$. Η ισχύς των αξιωμάτων του διανυσματικού χώρου αποδεικνύεται εύκολα με χρήση των αντίστοιχων αξιωμάτων ενός σώματος. Τα στοιχεία του $\mathbb{K}^n$ θα τα λέμε *αριθμητικά διανύσματα*.

Παρόμοια, εάν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$,

$$V^n = \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i \in V, i = 1, \ldots n\}$$

είναι επίσης διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα, χρησιμοποιώντας τις πράξεις του V: εάν $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in V^n$ και $a \in \mathbb{K}$, τότε

$$v \dot{+} u = (v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n)$$

και

$$a \cdot v = (av_1, \ldots, av_n)$$

Παράδειγμα 1.9 Ακολουθίες με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ ή σε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{K}$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{K}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{K}, i \in \mathbb{N}\}.$$

Οι πράξεις ορίζονται *κατά συνιστώσα*: εάν $(x) = (x_1, x_2, \ldots)$ και $(y) = (y_1, y_2, \ldots)$, και $a \in \mathbb{K}$, τότε

$$(x) \dot{+} (y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$

και

$$a(x) = (ax_1, ax_2, \ldots).$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι η ακολουθία $\bar{0} = (0, 0, \ldots)$.

Παρόμοια, εάν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$,

$$V^\infty = \{(v_1, v_2, \ldots) \mid v_i \in V, i \in \mathbb{N}\},$$

με πράξεις κατά συνιστώσα, είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα 1.10 Απεικονίσεις από ένα σύνολο A στο σώμα $\mathbb{K}$, ή σε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{K}$.

Το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το A στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}^A$. Εάν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $a \in \mathbb{K}$, ορίζουμε τις απεικονίσεις $f \dot{+} g$ και $a \cdot f$ οι οποίες, για κάθε $x \in A$, ικανοποιούν

$$\begin{aligned} (f \dot{+} g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (a \cdot f)(x) &= af(x) \end{aligned}$$

Με αυτές τις πράξεις, τις οποίες ονομάζουμε *πρόσθεση* και *πολλαπλασιασμό κατά σημείο*, το σύνολο $\mathbb{K}^A$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Μηδενικό διάνυσμα είναι η σταθερή απεικόνιση $\bar{0} : A \to \mathbb{K}$, για την οποία $\bar{0}(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. Ανάλογα ορίζεται η δομή διανυσματικού χώρου στο σύνολο V^A όλων των απεικονίσεων από το σύνολο A στο διανυσματικό χώρο V.

Παράδειγμα 1.11 Πολυώνυμα με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, με μία ή περισσότερες μεταβλητές.

Ένα πολυώνυμο μίας μεταβλητής x με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n, \qquad a_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n \text{ και } a_n \neq 0\,.$$

Το σύνολο όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής x με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}[x]$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το συμβολισμό $\mathbb{K}[x]_n$ για τα πολυώνυμα μίας μεταβλητής x βαθμού ίσου ή μικρότερου από n. Όταν δεν χρειάζεται να διακρίνουμε το σώμα των συντελεστών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\mathbb{P}$ ή $\mathbb{P}_n$.

Η πρόσθεση πολυωνύμων και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό ορίζονται όπως συνήθως. Όταν μελετάμε το σύνολο των πολυωνύμων ως διανυσματικό χώρο, δεν μας απασχολεί ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}[x]$ είναι το πολυώνυμο $\bar{0}$, στο οποίο όλοι οι συντελεστές είναι 0.

Ανάλογα ορίζονται χώροι πολυωνύμων με περισσότερες μεταβλητές. Για παράδειγμα ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών, x και y, είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij}x^iy^j\,.$$

Παράδειγμα 1.12 Τυπικές δυναμοσειρές, με μία ή περισσότερες μεταβλητές και συντελεστές στο $\mathbb{K}$.

Μία δυναμοσειρά μίας μεταβλητής t, με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_it^i\,, \qquad a_i \in \mathbb{K}\,, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Το σύνολο όλων των δυναμοσειρών μίας μεταβλητής t με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}(t)$.

Η πρόσθεση δυναμοσειρών και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό $c \in \mathbb{K}$, ορίζονται ως εξής

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_it^i\right) \dot{+} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_jt^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)t^k$$

$$c \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_it^i\right) = \sum_{j=0}^{\infty}(ca_j)t^j.$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι η δυναμοσειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} 0t^i.$$

Παράδειγμα 1.13 Τυπικά αθροίσματα στοιχείων ενός συνόλου X με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, ή σε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{K}$.
Θεωρούμε ένα σύνολο X και τα τυπικά αθροίσματα

$$\sum_{x\in X} a_x x\,, \qquad a_x \in \mathbb{K}$$

Η πρόσθεση ορίζεται μέσω της πρόσθεσης των συντελεστών ομοίων όρων :

$$\sum_{x\in X} a_x x \dot{+} \sum_{x\in X} b_x x = \sum_{x\in X} (a_x + b_x)x,$$

ενώ ο πολλαπλασιασμός με τον αριθμό $c \in \mathbb{K}$, μέσω του πολλαπλασιασμού των συντελεστών:

$$c \cdot \sum_{x\in X} a_x x = \sum_{x\in X} (c a_x)x.$$

Το μηδενικό διάνυσμα είναι το τυπικό άθροισμα με όλους τους συντελεστές ίσους με 0,

$$\bar{0} = \sum_{x\in X} 0x.$$

Παράδειγμα 1.14 Το σύνολο όλων των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο, με σημείο εφαρμογής σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου, δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο το ίδιο, αφού η πρόσθεση δύο γεωμετρικών διανυσμάτων ορίζεται μόνον όταν αυτά έχουν το ίδιο σημείο εφαρμογής. Στο Επίπεδο και Χώρος έχουμε δεί οτι έαν σε αυτό το σύνολο ορίσουμε τη σχέση ισοδυναμίας που προκύπτει από την παράλληλη μεταφορά, τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας αποτελούν τα 'ελεύθερα διανύσματα' πάνω στα οποία ορίζεται η δομή ενός διανυσματικού χώρου.

Θεωρούμε τώρα απεικονίσεις οι οποίες απεικονίζουν κάθε σημείο X του επιπέδου E^2 σε ένα γεωμετρικό διάνυσμα $\overrightarrow{XA} \in T_X E^2$, δηλαδή απεικονίσεις της μορφής $f : E^2 \longrightarrow \bigcup_{X\in E^2} T_X E^2$ για τις οποίες ισχύει $f(X) \in T_X E^2$. Αυτές τις συναρτήσεις μπορούμε να τις προσθέσουμε μεταξύ τους (και να τις πολλαπλασιάσουμε με αριθμό) κατά σημείο:

$$(f \dot{+} g)(X) = f(X) + g(X) = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$$

όπου το τελευταίο άθροισμα ορίζεται στο διανυσματικό χώρο $T_X E^2$. Τέτοιες απεικονίσεις ονομάζονται **διανυσματικά πεδία** στο E^2 και αποτελούν σημαντικά αντικείμενα τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική. Το σύνολο των διανυσματικών πεδίων στο E^2 αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς.

Γραμμικοί υπόχωροι

Ορισμός. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και ένα μη κενό υποσύνολο X του V. Το X λέγεται **γραμμικός υπόχωρος** του V (ή **διανυσματικός υπόχωρος** του V) εάν

1. Το X είναι κλειστό ως πρός την πρόθεση διανυσμάτων,
$$v,\, w \in X \Rightarrow v + w \in X\,.$$

2. Το X είναι κλειστό ως πρός τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό,
$$v \in X,\, a \in \mathbb{K} \Rightarrow av \in X\,.$$

Λήμμα 1.3 *Εάν X είναι γραμμικός υπόχωρος του V, τότε το X, με τους περιορισμούς των πράξεων του V,*
$$\begin{aligned} \alpha|_{X\times X} &: X \times X \to X \\ \mu|_{\mathbb{K}\times X} &: \mathbb{K} \times X \to X \end{aligned}$$
είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη. Ελέγχουμε οτι, εάν το υποσύνολο X είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V, τότε ικανοποιούνται τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου. Τα αξιώματα ΔΧ1, ΔΧ2, ΔΧ5, ΔΧ7 και ΔΧ8 ισχύουν για στοιχεία του X, αφού ισχύουν για όλα τα στοιχεία του V. Για να δείξουμε οτι το $\bar{0}$ ανήκει στο X, (ΔΧ3), παρατηρούμε οτι για οποιοδήποτε $v \in X$, $0 \cdot v = \bar{0}$, άρα $\bar{0} \in X$. Για να δείξουμε οτι το αντίθετο ενός στοιχείου του X ανήκει στο X, παρατηρούμε οτι αυτό είναι ίσο με $(-1) \cdot v$.

□

Παράδειγμα 1.15 Στο $\mathbb{R}^2$, ταυτισμένο με το καρτεσιανό επίπεδο, γραμμικοί υπόχωροι είναι το σύνολο $\{(0,\, 0)\}$ (ο μηδενικός υπόχωρος), όλες οι ευθείες που περιέχουν το $(0,\, 0)$, δηλαδή υποσύνολα της μορφής
$$X = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\right\}\,,$$
και ολόκληρο το επίπεδο $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 1.16 Σε ένα διανυσματικό χώρο V, για κάθε $v \in V$ το σύνολο $\{a\, v \mid a \in \mathbb{K}\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος.

Παράδειγμα 1.17 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\infty$ των ακολουθιών στους πραγματικούς αριθμούς, το υποσύνολο των ακολουθιών που είναι τελικά ίσες με μηδέν είναι γραμμικός υπόχωρος, (η ακολουθία $(x_1,\, x_2, \ldots)$ είναι τελικά ίση με μηδέν εάν υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > M \Rightarrow x_n = 0$).

Εάν X και Y είναι δύο γραμμικοί υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V, είναι τα σύνολα $X \cup Y$ και $X \cap Y$ γραμμικοί υπόχωροι; Ας εξετάσουμε κάποια παραδείγματα.

Εάν V είναι ο χώρος $\mathbb{R}^3$, και X, Y είναι δύο διαφορετικές ευθείες που περιέχουν το 0, είναι η ένωση $X \cup Y$ γραμμικός υπόχωρος;

Εάν X αποτελείται από το διάνυσμα $(1,\, 1,\, 2)$ και όλα τα πολλαπλάσιά του, $X = \{a(1,\, 1,\, 2) \mid a \in \mathbb{R}\}$, και Y αποτελείται από όλα τα πολλαπλάσια του $(1,\, 1,\, 0)$, $Y = \{a(1,\, 1,\, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, τότε $(1,\, 1,\, 2) + (1,\, 1,\, 0) = (2,\, 2,\, 2)$. Αλλά το διάνυσμα $(2,\, 2,\, 2)$

δεν ανήκει ούτε στο X, ούτε στο Y. Συμπεραίνουμε ότι $X \cup Y$ δεν είναι υποχρεωτικά γραμμικός υπόχωρος.

Εάν τώρα U και W είναι δύο διαφορετικά επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$, τα οποία περιέχουν το 0, είναι η τομή $U \cap W$ γραμμικός υπόχωρος;

Υποθέτουμε οτι

$$U = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\right\} ,$$

και

$$W = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = 0\right\} .$$

Τότε η τομή των δύο επιπέδων $U \cap W = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\, 2x + 3y = 0\}$ είναι μία ευθεία. Εύκολα βλέπουμε οτι αποτελείται από τα σημεία για τα οποία $x = 0$ και $y = 0$, δηλαδή αποτελείται από τα πολλαπλάσια του διανύσματος $(0,\, 0,\, 1)$, και είναι υπόχωρος του V.

Λήμμα 1.4 *Εάν X, Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, τότε $X \cap Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος.*

Απόδειξη. Εάν $v,\, w \in X \cap Y$, τότε $v,\, w \in X$ και αφού X είναι γραμμικός υπόχωρος, $v + w \in X$, και για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $av \in X$. Παρόμοια, $v,\, w \in Y$ και συνεπώς $v + w \in Y$ και $av \in Y$ για κάθε $a \in \mathbb{K}$. Συμπεραίνουμε οτι $v + w \in X \cap Y$, και $av \in X \cap Y$ για κάθε $a \in \mathbb{K}$, δηλαδή οτι $X \cap Y$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό, και συνεπώς είναι γραμμικός υπόχωρος του V.

□

Γραμμικοί Συνδυασμοί

Εάν $v_1, \ldots, v_k$ είναι διανύσματα του V, ένας **γραμμικός συνδυασμός** των $v_1, \ldots, v_k$ είναι ένα άθροισμα της μορφής $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k$, όπου οι συντελεστές $a_1,\, a_2, \ldots, a_k$ ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$ πάνω από το οποίο ορίζεται ο V.

Παράδειγμα 1.18 Κάθε διάνυσμα $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$, εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $e_1 = (1,\, 0,\, 0)$, $e_2 = (0,\, 1,\, 0)$ και $e_3 = (0,\, 0,\, 1)$:

$$(x,\, y,\, z) = x(1,\, 0,\, 0) + y(0,\, 1,\, 0) + z(0,\, 0,\, 1)\, .$$

Παράδειγμα 1.19 Κάθε πολυώνυμο βαθμού n στο $\mathbb{K}[x]$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $n+1$ μονωνύμων $p_0(x) = x^0$, $p_1(x) = x^1, \ldots, p_n(x) = x^n$,

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n.$$

Παράδειγμα 1.20 Εάν $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ είναι δύο μη συγγραμμικά γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο E^2, κάθε διάνυσμα με αρχή στο O εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$: υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a και b τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}\, .$$

Γενικότερα, εάν S είναι οποιοδήποτε υποσύνολο (πεπερασμένο ή άπειρο) ενός διανυσματικού χώρου V, ένας **γραμμικός συνδυασμός** στοιχείων του S είναι ένα *πεπερασμένο* άθροισμα: $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$, όπου, για $i = 1, \ldots, k$, $v_i \in S$ και $a_i \in \mathbb{K}$.

Χώρος που παράγεται από σύνολο διανυσμάτων.

Εάν $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου V, θέλουμε να εξετάσουμε το *μικρότερο* γραμμικό υποχώρο του V που περιέχει τα στοιχεία του S.

Είναι προφανές οτι ο ίδιος ο χώρος V περιέχει τα στοιχεία του S. Γενικεύοντας το Λήμμα 1.4, μπορούμε να δείξουμε ότι η τομή κάθε μη κενής συλλογής γραμμικών υπόχωρων του V είναι γραμμικός υπόχωρος του V. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{T}$ όλων των γραμμικών υπόχωρων του V οι οποίοι περιέχουν τα στοιχεία του S. Αυτό το σύνολο περιέχει το ίδιο το V, και συνεπώς δεν είναι κενό. Η τομή του $\mathcal{T}$, $X = \bigcap_{Z \in \mathcal{T}} Z$, περιέχει τα στοιχεία του S, είναι γραμμικός υπόχωρος του V, και είναι υπόχωρος κάθε γραμμικού υπόχωρου του V που περιέχει τα στοιχεία του S. Με αυτή την έννοια X είναι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του V ο οποίος περιέχει τα στοιχεία του S.

Θα δείξουμε οτι ο γραμμικός υπόχωρος X είναι ίσος με το σύνολο Y όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S. Πρώτα παρατηρούμε οτι αφού X είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου και περιέχει τα στοιχεία του S, περιέχει επίσης κάθε γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του S, δηλαδή $Y \subseteq X$.

Κατόπιν δείχνουμε οτι Y είναι γραμμικός υπόχωρος. Εάν $x = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$ και $y = b_1v_1 + \cdots + b_kv_k$, για a_i, $b_i \in \mathbb{K}$, τότε $x + y$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S,

$$x + y = (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_k + b_k)v_k\,,$$

και εάν $c \in \mathbb{K}$, cx επίσης εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S,

$$cx = ca_1v_1 + \cdots + ca_kv_k\,.$$

Άρα Y είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V, και συνεπώς είναι υπόχωρος του V.

Εφόσον Y είναι γραμμικός υπόχωρος του V, και περιέχει τα στοιχεία του S, ο X είναι υποσύνολο του Y, $X \subseteq Y$. Συμπεραίνουμε οτι $X = Y$, δηλαδή οτι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του V που περιέχει τα στοιχεία του S είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S.

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_k$, το συμβολίζουμε $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Λέμε οτι ο γραμμικός υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ **παράγεται** από τα $v_1, \ldots, v_k$.

Γενικότερα, εάν S είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του V, το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S είναι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του V ο οποίος περιέχει το S, και συμβολίζεται $\langle S \rangle$. Λέμε οτι ο γραμμικός υπόχωρος $\langle S \rangle$ **παράγεται** από το S, και το S ονομάζεται **παράγον σύνολο** του $\langle S \rangle$. Εάν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ το οποίο παράγει το διανυσματικό χώρο V, λέμε οτι ο V είναι **πεπερασμένα παραγόμενος**.

Παράδειγμα 1.21 Ο γραμμικός υπόχωρος $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$ είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα $(1, -2)$. Πράγματι, κάθε στοιχείο του U είναι πολλαπλάσιο του $(1, -2)$.

Παράδειγμα 1.22 Το επίπεδο $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$, $a \neq 0$, παράγεται από τα διανύσματα $(b, -a, 0)$ και $(c, 0, -a)$:

$$E = \langle (b, -a, 0), (c, 0, -a) \rangle$$

Πράγματι, όπως ελέγχουμε εύκολα, εάν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα $(b, -a, 0)$ ή το διάνυσμα $(c, 0, -a)$ για το (x, y, z) στην εξίσωση $ax + by + cz = 0$, βλέπουμε οτι αυτή ικανοποιείται. Συμπεραίνουμε οτι $\langle (b, -a, 0), (c, 0, -a) \rangle \subseteq E$.

Αντίστροφα, κάθε λύση της εξίσωσης $ax + by + cz = 0$, μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$s(b, -a, 0) + t(c, 0, -a)$$

για κατάλληλα $s, t \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $E \subseteq \langle (b, -a, 0), (c, 0, -a) \rangle$.

Παράδειγμα 1.23 Ο μηδενικός υπόχωρος $\{0\}$ παράγεται από το κενό σύνολο, $\langle \varnothing \rangle = \{0\}$. Πράγματι, ο μηδενικός υπόχωρος είναι η τομή όλων των υποχώρων που περιέχουν τα στοιχεία του κενού συνόλου, δηλαδή όλων των υποχώρων του V.

Θεωρούμε τους υπόχωρους X και Y του V που παράγονται από τα στοιχεία x_1, x_2 και y_1, y_2 αντίστοιχα, $X = \langle x_1, x_2 \rangle$, $Y = \langle y_1, y_2 \rangle$. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τα στοιχεία του γραμμικού υπόχωρου $X \cap Y$;

Εάν $u \in X \cap Y$, τότε $u \in X$ και μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των x_1, x_2: υπάρχουν αριθμοί $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, τέτοιοι ώστε $u = a_1 x_1 + a_2 x_2$. Επίσης $-u \in Y$, και εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των y_1, y_2, με συντελεστές $b_1, b_2 \in \mathbb{K}$: $-u = b_1 y_1 + b_2 y_2$. Συμπεραίνουμε οτι η τομή $X \cap Y$ αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής $b_1 y_1 + b_2 y_2$, όπου τα b_1, b_2 αποτελούν μέρος μιας λύσης (a_1, a_2, b_1, b_2) της διανυσματικής εξίσωσης

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 = 0 \qquad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{K}$$

Παράδειγμα 1.24 Θεωρούμε τους υπόχωρους X και Y του $\mathbb{R}^3$, $X = \langle x_1, x_2 \rangle$, $Y = \langle y_1, y_2 \rangle$, όπου $x_1 = (1, 1, 0)$, $x_2 = (-1, 0, 1)$, $y_1 = (1, -1, 1)$ και $y_2 = (1, 0, 3)$. Για να βρούμε τον υπόχωρο $X \cap Y$, προσδιορίζουμε τα b_1, b_2 τα οποία αποτελούν μέρος μίας λύσης του συστήματος

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0\,,$$

το οποίο γράφουμε σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0$$

και εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0$$

δηλαδή $b_1 = -\frac{4}{3}b_2$, και ο υπόχωρος $X \cap Y$ αποτελείται από διανύσματα της μορφής $b(-\frac{4}{3}y_1 + y_2)$ για $b \in \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, παράγεται από το διάνυσμα $-4(1,\,-1,\,1) + 3(1,\,0,\,3) = (-1,\,4,\,5)$,

$$X \cap Y = \langle(-1,\,4,\,5)\rangle\ .$$

Αθροίσματα γραμμικών υπόχωρων

Είδαμε ότι, εάν X, Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, $X \cap Y$ είναι επίσης γραμμικός υπόχωρος, αλλά $X \cup Y$ δεν είναι, εν γένει, γραμμικός υπόχωρος. Θα ορίσουμε ένα υποσύνολο του V, που είναι γραμμικός υπόχωρος, και θα δείξουμε οτι είναι ο *μικρότερος* γραμμικός υπόχωρος που περιέχει το $X \cup Y$.

Ορισμός. Εάν V είναι διανυσματικός χώρος, και X, Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, το σύνολο των διανυσμάτων που γράφονται ως άθροισμα ενός διανύσματος του X και ενός διανύσματος του Y,

$$X + Y = \{v \in V \mid \text{υπάρχουν } x \in X \text{ και } y \in Y \text{ τέτοια ώστε } v = x + y\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος του V, και ονομάζεται **άθροισμα** των X και Y.

Λήμμα 1.5 *Το άθροισμα των γραμμικών υπόχωρων $X+Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του V, και παράγεται από την ένωση $X \cup Y$,*

$$X + Y = \langle X \cup Y\rangle.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$, $y \in Y$ ισχύει $x + y \in \langle X \cup Y\rangle$. Συμπεραίνουμε οτι $X + Y \subseteq \langle X \cup Y\rangle$.

Για την αντίθετη κατεύθυνση, είναι προφανές οτι $X \subseteq X + Y$, $Y \subseteq X + Y$, και συνεπώς $X \cup Y \subseteq X + Y$. Εύκολα ελέγχουμε οτι το σύνολο $X + Y$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου V, και συνεπώς είναι γραμμικός υπόχωρος. Άρα

$$\langle X \cup Y\rangle \subseteq X + Y$$

□

Παράδειγμα 1.25 Θεωρούμε του υποχώρους του $\mathbb{K}^3$,

$$X = \{(x,\,0,\,0) \mid x \in \mathbb{K}\}$$

και
$$Y = \{(0,\, y,\, 0) \mid y \in \mathbb{K}\}\,.$$
Τότε
$$X + Y = \{(x,\, y,\, 0) \mid x,\, y \in \mathbb{K}\}\,.$$
Θεωρούμε ένα τρίτο υπόχωρο του $\mathbb{K}^3$, $Z = \{(z,\, z,\, 0) \mid z \in \mathbb{K}\}$. Είναι τα αθροίσματα $X+Y$, $X+Z$ διαφορετικά ή ίσα; Εύκολα ελέγχουμε οτι κάθε στοιχείο του $X+Y$ ανήκει στο $X+Z$,

$$\begin{aligned}(x,\, y,\, 0) &= ((x-y)+y,\, y,\, 0)\\ &= (x-y,\, 0,\, 0) + (y,\, y,\, 0) \in X + Z\,.\end{aligned}$$

Εξ ίσου εύκολα ελέγχουμε οτι, αντίστροφα, $X + Z \subseteq X + Y$. Συμπεραίνουμε οτι τα δύο αθροίσματα είναι ίσα.

Όταν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, η γεωμετρική ερμηνεία του συμπεράσματος είναι οτι το επίπεδο που ορίζουν οι ευθείες $\{(x,\, 0,\, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ και $\{(y,\, y,\, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$, είναι το ίδιο με το επίπεδο που περιέχει τους x και y άξονες.

Παράδειγμα 1.26 Στο σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στους πραγματικούς αριθμούς, ονομάζουμε μία συνάρτηση **άρτια** εάν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και **περιττή** εάν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ελέγξτε οτι τα σύνολα C^0_+ των άρτιων συναρτήσεων και C^0_-των περιττών συναρτήσεων είναι γραμμικοί υπόχωροι του $C^0(\mathbb{R})$.

Θα δείξουμε οτι $C^0(\mathbb{R}) = C^0_+ + C^0_-$. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f \in C^0$, και ορίζουμε

$$\begin{aligned}f^+(x) &= \frac{1}{2}\,(f(x) + f(-x))\\ f^-(x) &= \frac{1}{2}\,(f(x) - f(-x))\end{aligned}$$

Ελέγχουμε οτι η f^+ είναι άρτια, η f^- περιττή, και οτι $f = f^+ + f^-$.

Παράδειγμα 1.27 Θεωρούμε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$, $Y = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ και $Z = \{(u,\, v,\, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u + v + w = 0\}$. Το άθροισμα $Y + Z$ είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$. Για οποιοδήποτε διάνυσμα $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(a,\, b,\, c) &= (a,\, (b+c) - c,\, c)\\ &= (a,\, b+c,\, 0) + (0,\, -c,\, c)\end{aligned}$$

με $(a,\, b+c,\, 0) \in Y$, $(0,\, -c,\, c) \in Z$, και επίσης

$$\begin{aligned}(a,\, b,\, c) &= ((a+c) - c,\, b,\, c)\\ &= (a+c,\, b,\, 0) + (-c,\, 0,\, c)\end{aligned}$$

με $(a+c,\, b,\, 0)) \in Y$, $(-c,\, 0\, c) \in Z$. Παρατηρούμε οτι κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ γράφεται με περισσότερους από ένα διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα στοιχείων των Y και Z.

Υποθέτουμε οτι έχουμε γραμμικούς υπόχωρους Y και Z του διανυσματικού χώρου V, και οτι στο άθροισμα $X = Y + Z$, το στοιχείο $x \in X$ γράφεται ως $x = y_1 + z_1$ και ως $x = y_2 + z_2$, με y_1, $y_2 \in Y$, z_1, $z_2 \in Z$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 = x - x &= (y_1 + z_1) - (y_2 + z_2) \\ &= (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)\,. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1\,.$$

Αλλά το $y_1 - y_2$ ανήκει στο Y ενώ το $z_2 - z_1$ ανήκει στο Z, και εφ' όσον είναι ίσα, ανήκουν στην τομή $Y \cap Z$. Βλέπουμε οτι εάν υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι να εκφραστεί το x ως άθροισμα στοιχείων των Y και Z, τότε $Y \cap Z \neq \{0\}$.

Συμπεραίνουμε οτι εάν $Y \cap Z = \{0\}$, τότε κάθε στοιχείο του $Y + Z$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα στοιχείων του Y και του Z.

Ορισμός. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και γραμμικούς υπόχωρους Y, Z. Εάν $Y \cap Z = \{0\}$, τότε το άθροισμα $Y + Z$ ονομάζεται (**εσωτερικό**) **ευθύ άθροισμα**, και συμβολίζεται $Y \oplus Z$.

Παράδειγμα 1.28 Εάν μία συνάρτηση $f \in C^0(\mathbb{R})$ είναι άρτια και περιττή, τότε $f(x) = f(-x) = -f(x)$. Συμπεραίνουμε οτι η f είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση, και οτι $C^0_+(\mathbb{R}) \cap C^0_-(\mathbb{R}) = \{0\}$. Συνεπώς κάθε συνάρτηση γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης, και το σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ είναι το ευθύ άθροισμα των $C^0_+(\mathbb{R})$ και $C^0_-(\mathbb{R})$,

$$C^0(\mathbb{R}) = C^0_+(\mathbb{R}) \oplus C^0_-(\mathbb{R})\,.$$

Άσκηση 1.3 Επαληθεύσατε τα αξιώματα ενός σώματος για το σύνολο $\mathbb{Z}_3$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 3.

Άσκηση 1.4 Σε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα μπορείτε να ορίσετε με «φυσιολογικό» τρόπο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό (για παράδειγμα, κατά σημείο σε ένα χώρο συναρτήσεων), ώστε να είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$; Σε κάθε περίπτωση να ορίσετε τις πράξεις, να βρείτε το μηδενικό διάνυσμα και να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

α΄. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}$.

β΄. Το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

γ΄. Το σύνολο όλων των φθινουσών ακολουθιών

δ΄. Το σύνολο όλων των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0.

ε΄. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από τους φυσικούς αριθμούς στους πραγματικούς αριθμούς.

ϛ΄. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το σύνολο A στο $\mathbb{R}$, για οποιοδήποτε A.

ζ΄. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο σύνολο A, για οποιοδήποτε A.

η΄. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Z}$.

ϑ΄. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο $\mathbb{R}^n$, για οποιοδήποτε A.

Άσκηση 1.5 Οταν η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ορίζονται κατά σημείο, ποιά από τα ακόλουθα σύνολα συναρτήσεων αποτελούν διανυσματικούς χώρους πάνω από το $\mathbb{R}$; Σε κάθε περίπτωση να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις κατά σημείο πράξεις.

α΄. Συνεχείς συναρτήσεις από το $[0, 1]$ στο $\mathbb{R}$.

β΄. Συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν $f(1) = 0$.

γ΄. Συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν $g(0) = 1$.

δ΄. Συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $[-1, 1]$.

Άσκηση 1.6 Σε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα μπορείτε να ορίσετε με «φυσιολογικό» τρόπο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με μιγαδικό αριθμό, ώστε να είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{C}$; Σε κάθε περίπτωση να ορίσετε τις πράξεις, να βρείτε το μηδενικό διάνυσμα και να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

α΄. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$.

β′. Το σύνολο $\mathbb{C}^n$.

γ′. Το σύνολο ακολουθιών με μιγαδικούς όρους.

δ′. Το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$.

ε′. Το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 1.7 Σε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα μπορείτε να ορίσετε με «φυσιολογικό» τρόπο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με ρητό αριθμό, ώστε να είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{Q}$; Σε κάθε περίπτωση να ορίσετε τις πράξεις, να βρείτε το μηδενικό διάνυσμα και να ελέξγετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

α′. Το σύνολο των ακολουθιών στο $\mathbb{Q}$.

β′. Το σύνολο των ακολουθιών στο $\mathbb{Q}$ που συγκλίνουν στο $\sqrt{2}$.

γ′. Το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

δ′. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Άσκηση 1.8 Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ με τις πράξεις $(x,\, y) \dot{+} (x',\, y') = (x+x',\, y+y')$ και $\lambda \cdot (x,\, y) = (\lambda x,\, 0)$, για $\lambda \in \mathbb{R}$. Εξετάστε εάν αυτές οι πράξεις ορίζουν στο $\mathbb{R}^2$ δομή διανυσματικού χώρου πάνω από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 1.9 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο U πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και υποσύνολο $X \subseteq U$. Δείξτε οτι X είναι γραμμικός υπόχωρος του U εάν και μόνον εάν, για κάθε $x,\, y \in X$ και κάθε $a \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$ax + y \in X\,.$$

Άσκηση 1.10 Δείξτε οτι το σύνολο $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x = 3y\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
Είναι το σύνολο $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + y - 1 = 0\}$ γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$;
Είναι το σύνολο $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\, y = 3x\}$ γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$;

Άσκηση 1.11 Δίδονται τα διανύσματα $u = (1,\, 1,\, 0)$, $v = (1,\, 2,\, 1)$, $x = (-2,\, -3,\, -2)$ και $y = (0,\, 1,\, -3)$ του $\mathbb{R}^3$, και οι γραμμικοί υπόχωροι $U = \langle u,\, v\rangle$ και $V = \langle x,\, y\rangle$. Προσδιορίστε το γραμμικό υπόχωρο $U \cap V$.

Άσκηση 1.12 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^3$, θεωρούμε τους υπόχωρους

$$U = \{(u,\, w,\, z) \in \mathbb{C}^3 \,:\, 3u + 2w = 0\} \quad \text{και} \quad V = \{(u,\, w,\, z) \in \mathbb{C}^3 \,:\, \mathrm{i}w + z = 0\}\,.$$

Προσδιορίστε το γραμμικό υπόχωρο $U \cap V$.

Άσκηση 1.13 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}[x]$ όλων των πολυωνύμων $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, $a_n \neq 0$, όπου n είναι ο βαθμός του $p(x)$, θεωρούμε το υποσύνολο $\mathbf{Q}_k$ των πολυωνύμων βαθμού ίσου με k, και το υποσύνολο $\mathbf{P}_k$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με k. Εξετάστε εάν κάθε ένα από αυτά τα σύνολα αποτελεί γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{K}[x]$.

Άσκηση 1.14 Θεωρούμε το σύνολο Q των πολυωνύμων $p \in \mathbb{R}[x]$ με την ιδιότητα: η παράγωγος p' διαιρεί το p. Είναι το Q διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$;
Ίδιο ερώτημα για το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές $a_k = 0$ για $k \leq 3$.

Άσκηση 1.15 Επαληθεύσατε οτι το σώμα $\mathbb{K}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Δείξτε οτι οι μόνοι υπόχωροι του $\mathbb{K}$ είναι οι $\{0\}$ και $\mathbb{K}$.

Άσκηση 1.16 Θεωρήστε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με πράξεις κατά σημείο.
Είναι το υποσύνολο των συνεχών συναρτήσεων γραμμικός υπόχωρος;
Είναι το υποσύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν, για κάθε x, $|f(x)| \leq 1$ γραμμικός υπόχωρος;

Άσκηση 1.17 Γράψτε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης.

Άσκηση 1.18 Δείξτε οτι εάν X και Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, τότε $X \cup Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος εάν και μόνον εάν $X \subseteq Y$ ή $Y \subseteq X$.

Άσκηση 1.19 Θεωρούμε υποχώρους X, Y, Z του διανυσματικού χώρου V. Δείξτε οτι εάν $X \subseteq Z$ και $Y \subseteq Z$, τότε $X + Y \subseteq Z$.

Άσκηση 1.20 Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$. Δείξτε οτι μπορούμε να ορίσουμε στο σύνολο V τη δομή διανυσματικού χώρου πάνω από το $\mathbb{R}$. Αυτός ο χώρος συμβολίζεται $V_{\mathbb{R}}$. Εάν $V = \mathbb{C}^2$, ορίστε το διανυσματικό χώρο $V_{\mathbb{R}}$. Δείξτε οτι το σύνολο $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,:\, z = \bar{z},\, w = -\bar{w}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $V_{\mathbb{R}}$, αλλά δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.