Κεφάλαιο 3

Ιδιοτιμές και Διαγωνιοποίηση

3.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ενός τετραγωνικού πίνακα

Στο πρώτο μέρος του μαθήματος ΜΕΜ112 Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα το βασικό αντικείμενο που μελετήσαμε ήταν η εξίσωση

$$Ax = b\,,$$

όπου ο άγνωστος είναι το διάνυσμα x, ενώ στη δεξιά πλευρά έχουμε ένα δεδομένο διάνυσμα b.

Από τη μελέτη αυτής της εξίσωσης κατασκευάσαμε μία πλούσια θεωρία, που περιγράφει, μεταξύ άλλων, τη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$. Η T_A απεικονίζει τα στοιχεία του μηδενόχωρου του πίνακα A, $\mathcal{N}(A)$ στο 0, ενώ απεικονίζει τα στοιχεία του χώρου γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ αμφιμονοσήμαντα στα στοιχεία του χώρου στηλών $\mathcal{R}(A)$.

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα εξετάσουμε, για έναν τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A, την εξίσωση

$$Ax = \lambda x\,,$$

όπου οι άγνωστοι είναι ο αριθμός λ και το διάνυσμα x. Παρατηρήστε οτι το διάνυσμα εμφανίζεται και στις δύο πλευρές της εξίσωσης. Αναζητούμε διανύσματα στα οποία η απεικόνιση T_A δρα με τον πιο απλό τρόπο: τα πολλαπλασιάζει με έναν αριθμό λ, χωρίς να αλλάζει τη ''διεύθυνσή'' τους.

Παράδειγμα 3.1 Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ αλλάζει τη διεύθυνση του διανύσματος $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ενώ το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ απλώς το πολλαπλασιάζει με τον αριθμό 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.2 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ και τα διανύσματα $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Παρατηρούμε οτι

$$Ax = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4x$$

και

$$Ay = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} = 6y\,.$$

Εάν γράψουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^2$ ως γραμμικό συνδυασμό των x και y, εύκολα βρίσκουμε τη δράση του A σε αυτό: εάν $u = cx + dy$, τότε

$$\begin{aligned} Au &= cAx + dAy \\ &= 4cx + 6dy. \end{aligned}$$

Τα μη μηδενικά διανύσματα x που ικανοποιούν την εξίσωση $Ax = \lambda x$ για κάποιο αριθμό $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι, κατά κάποιο τρόπο, ειδικά διανύσματα του πίνακα A: αυτά πάνω στα οποία ο πολλαπλασιασμός με τον A δρα με τον απλούστερο τρόπο. Γι' αυτό ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα (στα αγγλικά eigenvectors, έχει διατηρηθεί ο γερμανικός όρος ως πρώτο συνθετικό). Εκτός από το θεωρητικό ενδιαφέρον, για να κατανοήσουμε καλύτερα τη δράση του πίνακα, τα ιδιοδιανύσματα παρουσιάζουν αμέτρητες εφαρμογές, σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και άλλων επιστημών. Κάποιες από αυτές τις εφαρμογές θα δούμε αργότερα.

Ορισμός 3.1. Θεωρούμε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{R}$.
Οι αριθμοί $\lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$Ax = \lambda x \tag{3.1}$$

ονομάζονται **ιδιοτιμές** του πίνακα A.
Τα μή μηδενικά διανύσματα $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την εξίσωση 3.1 ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα A για την ιδιοτιμή λ.

Δραστηριότητα 3.1 Ελέγξτε οτι $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Σε ποιά ιδιοτιμή του πίνακα αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα x;

Πώς θα βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $Ax = \lambda x$; Παρατηρούμε οτι για οποιοδήποτε λ, το διάνυσμα 0 είναι πάντα μία λύση. Μας ενδιαφέρουν οι **μή μηδενικές λύσεις**.

Γράφουμε την εξίσωση 3.1 στη μορφή

$$Ax - \lambda x = 0$$

και εισάγουμε τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbf{I}$,

$$Ax - \lambda \mathbf{I} x = 0$$

για να καταλήξουμε στην εξίσωση

$$(A - \lambda \mathbf{I})x = 0\,.$$

Βλέπουμε οτι τα x που αναζητούμε βρίσκονται στο μηδενοχώρο του πίνακα $A - \lambda\mathbf{I}$. Συνεπώς, το πρώτο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τους αριθμούς λ για τους οποίους ο μηδενοχώρος του πίνακα $A - \lambda\mathbf{I}$ περιέχει μή μηδενικά διανύσματα. Αυτό συμβαίνει μόνον όταν ο πίνακας $A - \lambda\mathbf{I}$ είναι ιδιόμορφος. Η ορίζουσα του πίνακα μας δίδει το κατάλληλο κριτήριο: ο πίνακας $A - \lambda\mathbf{I}$ είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν $\det(A - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Πρόταση 3.1 *Οι ιδιοτιμές του $n \times n$ πίνακα A είναι οι λύσεις της εξίσωσης*

$$\det(A - \lambda\mathbf{I}) = 0\,. \tag{3.2}$$

Η ορίζουσα $\det(A - \lambda\mathbf{I})$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με μεταβλητή λ. Ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A, και συμβολίζεται χ_A. Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι *ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου* του A.

Εάν λ_i είναι μία ιδιοτιμή του A, τότε $A - \lambda_i\mathbf{I}$ έχει μη τετριμμένο μηδενοχώρο.

Πρόταση 3.2 *Τα ιδιοδιανύσματα του A για την ιδιοτιμή λ_i είναι τα* μη μηδενικά διανύσματα *του μηδενοχώρου του πίνακα $A - \lambda_i\mathbf{I}$.*

Όλος ο μηδενοχώρος του $A - \lambda_i\mathbf{I}$ ονομάζεται **ιδιοχώρος** του A για την ιδιοτιμή λ_i.

Τονίζουμε οτι **το μηδενικό διάνυσμα δεν είναι ιδιοδιάνυσμα**. Ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή λ_i αποτελείται από το μηδενικό διάνυσμα και όλα τα ιδιοδιανύσματα του A για την ιδιοτιμή λ_i.

Δραστηριότητα 3.2 Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$, δηλαδή τα μη μηδενικά διανύσματα x που ικανοποιούν $Ax = x$.

Παράδειγμα 3.3 Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα A,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές, θεωρούμε την ορίζουσα

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(4-\lambda)(3+\lambda) + 10 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2\,. \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο $\chi_A = \lambda^2 - \lambda - 2$ παραγοντοποιείται, $\chi_A = (-1-\lambda)(2-\lambda)$. Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι -1 και 2. Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2\,.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, είναι οι μή μηδενικές λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$(A - \lambda_1\mathbf{I})x = 0\,,$$

δηλαδή της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ενώ ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ είναι ο μηδενοχώρος του πίνακα $A - \lambda_1\mathbf{I}$, δηλαδή ο υπόχωρος

$$X_1 = \{t(1,\,1) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ έχουμε, ανάλογα,

$$(A - \lambda_2\mathbf{I})x = 0$$

ή

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, και ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ είναι ο υπόχωρος

$$X_2 = \{t(5,\,2) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Παρατηρούμε οτι σε αυτό το παράδειγμα οι ιδιόχωροι του A για τις δύο ιδιοτιμές είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ διάστασης 1. Τα δύο ιδιοδιανύσματα που βρήκαμε είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^2$

Παράδειγμα 3.4 Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του B είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) + (4-\lambda) \\ &= (2-\lambda)^2(4-\lambda). \end{aligned}$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 4$.

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Φέρνουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, και έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Η εξίσωση έχει 2 ελεύθερες μεταβλητές. Μία βάση του μηδενόχωρου είναι τα διανύσματα $(-1, 0, 1)$ και $(-1, 1, 0)$. Ο ιδιόχωρος του B για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι ο

$$X_1 = \{s(-1, 0, 1) + t(-1, 1, 0) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Φέρνουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, και έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα του B για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι το $(-1, -2, 1)$. Ο ιδιόχωρος του B για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι

$$X_2 = \{t(-1, -2, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Παρατηρούμε οτι σε αυτό το παράδειγμα οι ιδιόχωροι του B για τις δύο ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 4$είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 και 1 αντίστοιχα. Βρήκαμε τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανυσματα, που αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$.

Δραστηριότητα 3.3 Ο μηδενόχωρος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ παράγεται από το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Βρείτε μία ιδιοτιμή και ένα ιδιοδιάνυσμα για τον πίνακα $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 3.5 Θεωρούμε τον πίνακα

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του C είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda). \end{aligned}$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$.

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Φέρνουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, και έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Μία λύση της εξίσωσης είναι η $x = (1, 1, 1)$. Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα του C για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι το $x = (1, 1, 1)$. Ο ιδιόχωρος του C για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι ο χώρος λύσεων της εξίσωσης,

$$X_1 = \{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα του C για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι το $x = (0,\, 1,\, 1)$. Ο ιδιόχωρος του C για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι

$$X_2 = \{t(0,\, 1,\, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Παρατηρούμε οτι σε αυτό το παράδειγμα, στις δύο διαφορετικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν μόνο δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα οποία δεν παράγουν όλο το χώρο $\mathbb{R}^3$.

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A πρέπει να λύσουμε την πολυωνυμική εξίσωση $\chi_A(\lambda) = 0$. Ένα πολυώνυμο μπορεί να μην έχει λύσεις πραγματικούς αριθμούς. Όμως σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, (Σημειώσεις Επίπεδο και Χώρος, Κεφάλαιο 3), ένα πολυώνυμο με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού $n \geq 1$, έχει πάντα λύσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Θεώρημα 3.3 *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού* $n \geq 1$,

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0\,, \qquad a_n \neq 0,\ a_0,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{C}\,.$$

Τότε υπάρχουν n *μιγαδικοί αριθμοί* $w_1,\, \ldots,\, w_n$*, όχι υποχρεωτικά διαφορετικοί, τέτοιοι ώστε*

$$p(z) = a_n(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_n)\,.$$

Οι αριθμοί $w_1,\, \ldots,\, w_n$ ονομάζονται **ρίζες** του πολυωνύμου $p(z)$. Εάν ακριβως k από τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1,\, \ldots,\, w_n$ είναι ίσοι με w, λέμε οτι w είναι ρίζα του $p(z)$ με **πολλαπλότητα** k. Τότε $(z - w)^k$ διαιρεί το πολυώνυμο $p(z)$, αλλά $(z - w)^{k+1}$ δεν το διαιρεί.

Είναι προφανές οτι οι ρίζες $w_1,\, \ldots,\, w_n$ του πολυωνύμου $p(z)$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $p(z) = 0$, αφού

$$p(w_i) = a_n(w_i - w_1)\cdots(w_i - w_i)\cdots(w_i - w_n) = 0\,.$$

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή οι μόνες λύσεις της εξίσωσης $p(z) = 0$ είναι οι ρίζες $w_1,\, \ldots,\, w_n$.

Πρόταση 3.4 *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού* n,

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0\,, \qquad a_n \neq 0,\ a_0,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{C}\,.$$

Τότε $p(a) = 0$ *εάν και μόνον εάν* $z - a$ *διαιρεί το πολυώνυμο* $p(z)$.

Στο Παράδειγμα 3.4, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_B(\lambda) = (2-\lambda)^2(4-\lambda)$ έχει ρίζες $\lambda_1 = 2$ με πολλαπλότητα 2, και $\lambda_2 = 4$ με πολλαπλότητα 1. Λέμε οτι η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχει *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2, ενώ η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ έχει *αλγεβρική πολλαπλότητα* 1. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με τη διάσταση του αντίστοιχου ιδιόχωρου. Αντιθέτως, στο Παράδειγμα 3.5, στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_C(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$, η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2, αλλά ο αντίστοιχος ιδιόχωρος του πίνακα C έχει διάσταση 1.

Ορισμός 3.2. Εάν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, **αλγεβρική πολλαπλότητα** της λ είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $(x-\lambda)^k$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$.
Γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι η διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή.

Θα δούμε οτι αυτή η διάκριση μεταξύ της αλγεβρικής και της γεωμετρικής πολλαπλότητας μίας ιδιοτιμής Είναι πολύ σημαντική.

Αφού οι ρίζες ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί, ένας πίνακας με πραγματικές συνιστώσες μπορεί να έχει μιγαδικές ιδιοτιμές, όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.6 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda^2 - 8\lambda + 25)(2-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο έχει μία πραγματική ρίζα, $\lambda_1 = 2$. Οι άλλες δύο ρίζες είναι μιγαδικές,

$$\lambda_2 = 4 + 3\mathrm{i} \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 4 - 3\mathrm{i}\,.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

από την οποία βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι το $x = (0, 1, 0)$.

Εάν αντικαταστήσουμε στον πίνακα $A-\lambda\mathbf{I}$ μία από τις μη πραγματικές ιδιοτιμές του πίνακα A, παίρνουμε έναν πίνακα με συνιστώσες στο $\mathbb{C}$. Αφού οι πράξεις στο $\mathbb{C}$ έχουν ιδιότητες ανάλογες των πράξεων στο $\mathbb{R}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss σε έναν πίνακα με μιγαδικές συνιστώσες, για να βρούμε τα διανύσματα του μηδενόχωρου του $A-\lambda\mathbf{I}$, τα οποία θα ανήκουν στο σύνολο διατεταγμένων τριάδων μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}^3$.

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4+3\mathrm{i}$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} -3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2-3\mathrm{i} & 0 \\ -3 & 0 & -3\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $-\mathrm{i}$ και την αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή. Ο νέος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή. Στην εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2-3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

θέτουμε την τιμή 1 για την ελεύθερη μεταβλητή x_3, και βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4+3\mathrm{i}$ είναι το $x = (-\mathrm{i},\, 0,\, 1)$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4-3\mathrm{i}$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2+3\mathrm{i} & 0 \\ -3 & 0 & 3\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με i και την αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή. Στην εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2+3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

θέτουμε την τιμή 1 για την ελεύθερη μεταβλητή x_3 και βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4-3\mathrm{i}$ είναι το $x = (\mathrm{i},\, 0,\, 1)$.

Εάν θεωρήσουμε τον πίνακα A με συνιστώσες πραγματικούς αριθμούς, αυτός έχει μόνο μία ιδιοτιμή, $\lambda_1 = 2$, και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο

$$X_1 = \{t(0,\, 1,\, 0) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Εάν θεωρήσουμε τον πίνακα A με συνιστώσες μιγαδικούς αριθμούς τότε αυτός έχει τρεις ιδιοτιμές. Ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι ο

$$X_1 = \{t(0,\, 1,\, 0) : t \in \mathbb{C}\}\,,$$

ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4+3\mathrm{i}$ είναι ο

$$X_2 = \{t(-\mathrm{i},\, 0,\, 1) : t \in \mathbb{C}\}$$

και ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4 - 3i$ είναι ο

$$X_3 = \{t(\mathrm{i},\, 0,\, 1) : t \in \mathbb{C}\}\,.$$

Ανακεφαλαιώνουμε τη διαδικασία για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων ενός $n \times n$ πίνακα

1. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $A - \lambda\mathbf{I}$. Αυτή είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς τη μεταβλητή λ, το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του A.

2. Βρίσκουμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου. Αυτές είναι οι *ιδιοτιμές* του A.

3. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, βρίσκουμε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$(A - \lambda_i\mathbf{I})x = 0\,.$$

Κάθε μη μηδενική λύση είναι ένα *ιδιοδιάνυσμα* του πίνακα A για την ιδιοτιμή λ_i, ενώ το σύνολο όλων των λύσεων είναι ο *ιδιόχωρος* του A για την ιδιοτιμή λ_i.

Δραστηριότητα 3.4 Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα[1]

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Εν αντιθέσει με την περίπτωση της λύσης του συστήματος $Ax = b$ με απαλοιφή Gauss, η διαδικασία που περιγράφουμε εδώ δεν δίδει έναν αλγόριθμο για τον αναλυτικό υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων. Το πρόβλημα βρίσκεται στο βήμα 2. Ενώ γνωρίζουμε οτι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει n ρίζες (στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών), για πολυώνυμα βαθμού $n \geq 5$ δεν είναι δυνατόν να βρεθεί αναλυτικός τύπος για τον υπολογισμό τους (όπως ο τύπος των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης)[2].

Παρ' όλο που δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος που να δίδει τις ρίζες στη γενική περίπτωση, σε πολλές ειδικές περιπτώσεις μπορούμε να τις προσδιορίσουμε αναλυτικά, ή μπορούμε να τις προσεγγίσουμε αριθμητικά. Θα δούμε οτι μπορούμε να έχουμε κάποια πληροφορία για τις ιδιοτιμές ακόμα και χωρίς να τις υπολογίσουμε.

Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός πίνακα ονομάζεται **ίχνος** του πίνακα (trace) και συμβολίζεται $\mathrm{tr}\, A$.

[1] Τα διανύσματα που θα βρείτε πρέπει να είναι μη μηδενικά πολλαπλάσια των (5, 2) και (3, 1).

[2] Αυτό είναι το περιεχόμενο της θεωρίας Galois (την οποία μπορείτε να μελετήσετε στο μάθημα Θεωρία Σωμάτων), μίας πολύ ενδιαφέρουσας θεωρίας που δημιούργησε ένας ακόμη πιο ενδιαφέρων άνθρωπος.

Πρόταση 3.5 *Θεωρούμε έναν $n \times n$ πίνακα A πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς. Μετρώντας την αλγεβρική πολλαπλότητα, ο πίνακας έχει n ιδιοτιμές, λ_1, λ_2, …, λ_n, όχι υποχρεωτικά όλες διαφορετικές.*

1. *Το άθροισμα των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα,*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A$$

2. *Το γινόμενο των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα,*

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A\,.$$

Απόδειξη.

1. Εάν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A, έχουμε

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)\,.$$

Συγκρίνουμε τους όρους τάξεως $n-1$ στα δύο πολυώνυμα. Οι όροι στους οποίους το λ εμφανίζεται στη δύναμη $n-1$ στην ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

πρέπει να προέρχονται από όρους της ορίζουσας που είναι γινόμενο τουλάχιστον $n-1$ στοιχείων στη διαγώνιο του πίνακα. Αλλά ένας όρος της ορίζουσας δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από ένα στοιχείο από κάθε στήλη και από κάθε γραμμή του πίνακα. Συνεπώς, ο μοναδικός όρος που περιέχει το γινόμενο $n-1$ διαγώνιων στοιχείων, είναι το γινόμενο όλων των διαγώνιων στοιχείων,

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)\,.$$

Ο όρος τάξεως $n-1$ αυτού του πολυωνύμου είναι

$$a_{11}\lambda^{n-1} + a_{22}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{nn}\lambda^{n-1} = (a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}\,.$$

Από την άλλη πλευρά ο όρος τάξεως $n-1$ του πολυωνύμου $(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ είναι

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1}\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{tr} A\,.$$

2. Εξετάζουμε του σταθερούς όρους των πολυωνύμων

$$\det(A - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)\,.$$

Στη δεξιά πλευρά, ο σταθερός όρος είναι $\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$. Στην αριστερή πλευρά ο σταθερός όρος είναι η τιμή του πολυωνύμου για $\lambda = 0$, δηλαδή $\det A$. Άρα

$$\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A\,.$$

□

Δραστηριότητα 3.5 Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$, δηλαδή τις ρίζες του πολυωνύμου $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 9 & 2-\lambda \end{vmatrix}$.
Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα και το γινόμενο των ιδιοτιμών είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.

Δραστηριότητα 3.6 Υπολογίστε τις μιγαδικές ιδιοτιμές του πίνακα $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.
Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα και το γινόμενο των ιδιοτιμών είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.
Για κάθε ιδιοτιμή βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα του B στο $\mathbb{C}^2$. (Παρατηρήστε οτι $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 2$.)

Θα δείξουμε οτι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ειδικότερα, εάν ο $n \times n$ πίνακας A έχει n διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές, τότε υπάρχει μία βάση του $\mathbb{R}^n$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα.

Λήμμα 3.6 *Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Εάν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ είναι οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1, \ldots, v_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε υπάρχει k, με $1 < k \leq m$, τέτοιο ώστε $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά $v_1, \ldots, v_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και μπορούμε να γράψουμε

$$v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1}\,. \tag{3.3}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της 3.3 με A έχουμε

$$Av_k = a_1 Av_1 + \cdots + a_{k-1} Av_{k-1}$$

και αφού κάθε v_i είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ_i,

$$\lambda_k v_k = a_1\lambda_1 v_1 + \cdots + a_{k-1}\lambda_{k-1} v_{k-1} \tag{3.4}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3.3 με λ_k, και την αφαιρούμε από την 3.4:

$$0 = a_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}\,.$$

Εφ' όσον τα $v_1, \ldots, v_{k-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $a_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k-1$, αλλά $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$, και συνεπώς $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Αλλά τότε, από την 3.3, $v_k = 0$, άτοπο. Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

Υπενθυμίζουμε οτι δύο τετραγωνικοί πίνακες A και B λέγονται **όμοιοι** εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε $A = S^{-1}BS$.

Πρόταση 3.7 *Εάν $A = S^{-1}BS$, τότε A και B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Εάν v είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ, τότε Sv είναι ιδιοδιάνυσμα του B για την ίδια ιδιοτιμή.*

Απόδειξη. Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουμε

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det(A - x\mathbf{I}) \\
&= \det(S^{-1}BS - xS^{-1}\mathbf{I}S) \\
&= \det(S^{-1}(B - x\mathbf{I})S) \\
&= \det S^{-1} \det(B - x\mathbf{I}) \det S \\
&= \chi_B(x)\,.
\end{aligned}$$

Εάν v είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ, τότε $S^{-1}BSv = \lambda v$. Άρα $BSv = S(\lambda v) = \lambda(Sv)$, και Sv είναι ιδιοδιάνυσμα του B για την ιδιοτιμή λ.

□

3.2 Ασκήσεις

Άσκηση 3.1 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα, και το γινόμενο των ιδιοτιμών είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.

Άσκηση 3.2 Εάν $B = A - 7\mathbf{I}$, όπου A είναι ο πίνακας της Άσκησης 3.1, βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B. Πως σχετίζονται με αυτά του A;

Άσκηση 3.3 Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε οτι οι ιδιοτιμές αλλάζουν όταν αφαιρέσουμε πολλαπλάσιο μίας γραμμής από μία άλλη. Εξηγήστε γιατί εάν το 0 είναι μία από τις ιδιοτιμές, αυτή δεν αλλάζει.

Άσκηση 3.4 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ελέγξτε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος, και το γινόμενο με την ορίζουσα.

Άσκηση 3.5 Υποθέτουμε οτι λ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα A, και x είναι ιδιοδιάνυσμα: $Ax = \lambda x$. Δείξτε οτι x είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του αντιστρόφου A^{-1}, και βρείτε την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Άσκηση 3.6 Δείξτε οτι οι ιδιοτιμές του ανάστροφου πίνακα A^T είναι ίσες με τις ιδιοτιμές του A.

Άσκηση 3.7 Κατασκευάστε 2×2 πίνακες A και B, τέτοιους ώστε οι ιδιοτιμές του AB δεν είναι ίσες με τα γινόμενα των ιδιοτιμών του A και του B, και οι ιδιοτιμές του $A + B$ δεν είναι ίσες με τα αθροίσματα των ιδιοτιμών.

Άσκηση 3.8 Υποθέτουμε οτι ο 3×3 πίνακας A έχει ιδιοτιμές 0, 3, 5 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v, w.

1. Βρείτε μία βάση του μηδενοχώρου του A, και μία βάση του χώρου στηλών του A.
2. Βρείτε μία λύση της εξίσωσης $Ax = v + w$. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης.
3. Δείξτε οτι η εξίσωση $Ax = u$ δεν έχει λύσεις.

Άσκηση 3.9 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.10 Κάθε πίνακας μετάθεσης αφήνει το διάνυσμα $x = (1, 1, \ldots, 1)$ αμετάβλητο. Άρα έχει μία ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε άλλες δύο ιδιοτιμές για τους πίνακες

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3 Διαγωνιοποίηση

Στο Παράδειγμα 3.2 παρατηρήσαμε οτι εάν γράψουμε ένα διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό ιδιοδιανυσμάτων του A, τότε μπορούμε εύκολα να περιγράψουμε τη δράση του A σε αυτό το διάνυσμα. Αφού $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} &= 3 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 12 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Εάν ένας $n \times n$ πίνακας έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε κάθε διάνυσμα του $\mathbb{K}^n$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων, και ο πολλαπλασιασμός οποιουδήποτε διανύσματος με τον πίνακα εκφράζεται με αυτό τον τρόπο. Το ακόλουθο θεώρημα δίδει μια πιο ακριβή διατύπωση αυτής της ιδέας.

Θεώρημα 3.8 *Υποθέτουμε οτι ο $n \times n$ πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^n$. Θεωρούμε το πίνακα R, ο οποίος έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα $x_1, \ldots, x_n$. Τότε ο πίνακας*

$$\Lambda = R^{-1}AR$$

είναι διαγώνιος, και τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ του A. Δηλαδή

$$\Lambda = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

και

$$A = R\Lambda R^{-1} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}^{-1}.$$

Απόδειξη. Η j-στήλη του πίνακα AR είναι το διάνυσμα $Ax_j = \lambda_j x_j$. Άρα

$$AR = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_n x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Η j-στήλη του $R^{-1}(AR)$ είναι η j-στήλη του AR πολλαπλασιασμένη με τον πίνακα R^{-1}. Αλλά η j-στήλη του AR είναι η j-στήλη του R πολλαπλασιασμένη επί λ_j. Άρα η j-στήλη του

$R^{-1}(AR)$ είναι $\lambda_j \times$ (j-στήλη του $R^{-1}R$), δηλαδή $\lambda_j e_j$. Συμπεραίνουμε οτι

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 e_1 & \cdots & \lambda_n e_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix},$$

δηλαδή ο διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ στη διαγώνιο.

□

Παράδειγμα 3.7 Στα Παραδείγμα 3.4 είδαμε οτι ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

έχει τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ και $(-1, -2, 1)$. Θεωρούμε τον πίνακα R με στήλες αυτά τα ιδιοδιανύσματα,

$$R = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$BR = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

και

$$R \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Προσέξτε οτι η διάταξη των ιδιοδιανυσμάτων στον πίνακα R είναι η ίδια με τη διάταξη των αντίστοιχων ιδιοτιμών στον πίνακα Λ.

Δραστηριότητα 3.7 Στη Δραστηριότητα 3.4 βρήκατε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. Βάλτε τα ιδιοδιανύσματα που βρήκατε ως στήλες του πίνακα R και υπολογίστε τους πίνακες R^{-1} και $R^{-1}AR$.

Δραστηριότητα 3.8 Θεωρήστε τον πίνακα R που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B που υπολογίσατε στη Δραστηριότητα 3.6, και τον διαγώνιο πίνακα Λ που έχει τις ιδιοτιμές στην αντίστοιχη θέση στη διαγώνιο.
Επαληθεύστε οτι $BR = R\Lambda$.

Ένας πίνακας A για τον οποίο υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας R τέτοιος ώστε ο $R^{-1}AR$ να είναι διαγώνιος ονομάζεται **διαγωνιοποιήσιμος**. Εν γένει, κάποια από τα ιδιοδιανύσματα μπορεί να έχουν μιγαδικές συνιστώσες, οπότε ο πίνακας $\mathbb{R}$ επίσης είναι ένας μιγαδικός πίνακας.

Εάν ο πίνακας A έχει πραγματικές συνιστώσες, και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας R με πραγματικές συνιστώσες τέτοιος ώστε ο $R^{-1}AR$ να είναι διαγώνιος, λέμε οτι ο A είναι **διαγωνιοποιήσιμος πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς**.

Στο Λήμμα 3.6 δείξαμε οτι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αυτό συνεπάγεται οτι εάν ένας $n \times n$ πίνακας έχει n *διαφορετικές* ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}$, τότε έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα στον $\mathbb{C}^n$, και είναι διαγωνιοποιήσιμος. Εάν ο πίνακας έχει n διαφορετικές *πραγματικές* ιδιοτιμές, τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς.

3.4 Εφαρμογές της διαγωνιοποίησης

Η διαγωνιοποίηση είναι μία τεχνική που χρησιμοποιείται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, αλλά και σε άλλες επιστήμες. Στις επόμενες παραγράφους θα δούμε κάποια απλά παραδείγματα.

Υπολογισμός δυνάμεων ενός πίνακα

Εάν A, B και R είναι $n \times n$ τετραγωνικοί πίνακες, R είναι αντιστρέψιμος και $A = RBR^{-1}$, παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} A^2 &= RBR^{-1}RBR^{-1} = RB^2R^{-1} \\ A^3 &= A^2A = RB^2R^{-1}RBR^{-1} = RB^3R^{-1} \end{aligned}$$

και μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή οτι για κάθε k,

$$A^k = RB^kR^{-1}\,.$$

> **Δραστηριότητα 3.9** Αποδείξτε με επαγωγή στο k οτι εάν $A = RBR^{-1}$, τότε για κάθε k
> $$A^k = RB^kR^{-1}\,.$$
> Καταγράψτε αναλυτικά όλη τη διαδικασία της μαθηματικής επαγωγής, σύμφωνα με το υπόδειγμα στο Επίπεδο και Χώρος, Κεφάλαιο 3.

Εάν ο 2×2 πίνακας D είναι διαγώνιος, $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$, τότε

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & d_2^2 \end{bmatrix} \\ D^3 &= \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & d_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^3 & 0 \\ 0 & d_2^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Για κάθε $n \times n$ διαγώνιο πίνακα D μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή οτι για κάθε k,

$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{bmatrix}.$$

Δραστηριότητα 3.10 Αποδείξτε με επαγωγή στο k οτι

$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{bmatrix}.$$

Εάν ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.8, εάν R είναι ο αντιστρέψιμος πίνακας με τα ιδιοδιανύσματα ως στήλες, τότε $R^{-1}AR$ είναι διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο. Συνεπώς, για κάθε φυσικό αριθμό k,

$$A^k = R \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} R^{-1}.$$

Παράδειγμα 3.8 Στα Παραδείγματα 3.4 και 3.7 είδαμε οτι ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

έχει τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ και $(-1, -2, 1)$, και οτι

$$BR = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = R\Lambda.$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο, R^{-1},

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Τώρα για να βρούμε οποιαδήποτε δύναμη του B αρκεί να υπολογίσουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} B^k &= R\Lambda^k R^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2^k & -2^k & -4^k \\ 0 & 2^k & -2(4^k) \\ 2^k & 0 & 4^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^k+4^k & -2^k+4^k & -2^k+4^k \\ 2(-2^k+4^k) & 2(4^k) & 2(-2^k+4^k) \\ 2^k-4^k & 2^k-4^k & 3(2^k)-4^k \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Δραστηριότητα 3.11 Εφαρμόστε τη διαδικασία Gauss – Jordan στον επεκτεταμένο πίνακα

$$
\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

για να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα R^{-1}.

Δραστηριότητα 3.12 Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ της Δραστηριότητας 3.7, υπολογίστε τον πίνακα A^{10}.
Υπολογίστε την αναλυτική έκφραση[3] για τον πίνακα A^k.

Εξισώσεις Διαφορών

Μία **εξίσωση διαφορών** είναι μία εξίσωση που συνδέει τους όρους μίας ακολουθίας με προηγούμενους όρους της ακολουθίας. Για παράδειγμα, θεωρήστε την ακολουθία x_k που ορίζεται από τη σχέση

$$x_{k+1} = 5x_k - 1\,,\ \text{με αρχική συνθήκη } x_0 = 1\,.$$

Από αυτές τις σχέσεις βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5\cdot 1 - 1 = 4 \\
x_2 &= 5\cdot 4 - 1 = 19 \\
x_3 &= 5\cdot 19 - 1 = 94
\end{aligned}
$$

Το ζητούμενο είναι να βρούμε μία έκφραση για το γενικό όρο x_k της ακολουθίας.

Μία ιδιαίτερα απλή περίπτωση εξίσωσης διαφορών είναι η

$$x_{k+1} = ax_k\,,\ \text{για } a \in \mathbb{R}\,,\ \text{με αρχική συνθήκη } x_0 = c\,.$$

[3] Πρέπει να βρείτε $\begin{bmatrix} -5+6(2^k) & 15-15(2^k) \\ -2+2(2^k) & 6-5(2^k) \end{bmatrix}$.

Σε αυτή την περίπτωση εύκολα δείχνουμε με επαγωγή οτι x_k είναι μία γεωμετρική ακολουθία, $x_k = a^k c$.

Παράδειγμα 3.9 Η **ακολουθία Fibonacci** ορίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}\,, \text{ με αρχικές συνθήκες } F_1 = 1\,,\ F_0 = 0\,. \tag{3.5}$$

Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας Fibonacci είναι 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Για να υπολογίσουμε τον γενικό όρο της ακολουθίας θεωρούμε την ακολουθία διανυσμάτων $u_k = (F_k,\, F_{k-1})$. Τότε η εξίσωση διαφορών 3.5 μπορεί να εκφραστεί ως μία διανυσματική εξίσωση διαφορών,

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{bmatrix} = A u_{k-1}$$

για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ με αρχικές συνθήκες $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Γενικότερα, θεωρούμε n ακολουθίες $x_1 = (x_{1,k}),\, \ldots,\, x_n = (x_{n,k})$ και το διάνυσμα $u_k = (x_{1,k},\, \ldots,\, x_{n,k}) \in \mathbb{R}^n$. Ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων διαφορών είναι μία σχέση

$$u_{k+1} = A u_k\,, \text{ με αρχικές συνθήκες } u_0 = (x_{1,0},\, \ldots,\, x_{n,0})$$

όπου A είναι ένας $n \times n$ πίνακας.

Πρόταση 3.9 *Η λύση του συστήματος εξισώσεων διαφορών*

$$u_{k+1} = A u_k\,, \text{ με αρχικές συνθήκες } u_0 = (x_{1,0},\, \ldots,\, x_{n,0}) \tag{3.6}$$

είναι

$$u_k = A^k u_0\,.$$

Απόδειξη. Για $k = 1$, από την 3.6, έχουμε $u_1 = A u_0$. Υποθέτουμε οτι $u_k = A^k u_0$. Τότε, από την 3.6 έχουμε $u_{k+1} = A u_k = A(A^k u_0) = A^{k+1} u_0$. Από το Αξίωμα της Επαγωγής, συμπεραίνουμε οτι για κάθε φυσικό αριθμό k, $u_k = A^k u_0$.

□

Παράδειγμα 3.10 Οι όροι της ακολουθίας Fibonacci δίδονται από την έκφραση $u_k = A^k u_0$, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τις δυνάμεις A^k, εξετάζουμε εάν ο πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος. Βρίσκουμε οτι ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 - \lambda - 1$, το οποίο έχει ρίζες τις δύο ιδιοτιμές, $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A για τις ιδιοτιμές λ_i, $i = 1, 2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\begin{bmatrix} 1-\lambda_i & 1 \\ 1 & -\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$, δηλαδή $\begin{bmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Εκφράζουμε την αρχική συνθήκη $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων. Οι συντελεστές c_1 και c_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ και $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Άρα

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^k \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \lambda_2^k \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε στην αναλυτική έκφραση για τον γενικό όρο της ακολουθίας Fibonacci,

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$$

Παρατηρήστε οτι οι όροι της ακολουθίας Fibonacci είναι φυσικοί αριθμοί. Άρα στο τελικό αποτέλεσμα θα απαλειφθούν οι τετραγωνικές ρίζες.

Ας δούμε ένα παράδειγμα με πιο απλούς αριθμούς, για να επικεντρωθούμε στη διαδικασία.

Παράδειγμα 3.11 Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων διαφορών

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= 7x_k - 15y_k \\
y_{k+1} &= 2x_k - 4y_k,
\end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Εκφράζουμε το σύστημα ως μία διανυσματική εξίσωση $u_{k+1} = Au_k$, με $u_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ και $A = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Στη Δραστηριότητα 3.4 βρήκαμε οτι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ και ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Άρα

$$\begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2^k) \\ 1(2^k) \end{bmatrix}.$$

Εάν θέσουμε τα ιδιοδιανύσματα ως στήλες του πίνακα R, και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές στη διαγώνιο του πίνακα Λ, έχουμε $A^k = R\Lambda^k R^{-1}$, δηλαδή τον πίνακα που υπολογίσαμε στη Δραστηριότητα 3.12. Πολλαπλασιάζουμε το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών με αυτόν τον πίνακα και βρίσκουμε τη λύση του συστήματος εξισώσεων διαφορών,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 9(2^k) \\ 4 - 3(2^k) \end{bmatrix}.$$

Ένας άλλος τρόπος να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα είναι να εκφράσουμε το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων, λύνοντας το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε $c = 2$, $d = -3$. Αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ στη σχέση $u_k = A^k u_0$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^k \left(2\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= 2(1^k)\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 3(2^k)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 - 9(2^k) \\ 4 - 3(2^k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Μαρκοβιανές διαδικασίες

Μία **Μαρκοβιανή διαδικασία** (ή Μαρκοβιανή αλυσσίδα) αποτελείται από έναν σταθερό πληθυσμό, τα άτομα του οποίου βρίσκονται σε διαφορετικές καταστάσεις. Σε κάθε βήμα της διαδικασίας τα άτομα του πληθυσμού μπορεί να μετακινηθούν από μία κατάσταση σε μία άλλη. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό μίας Μαρκοβιανής διαδικασίας είναι οτι η πιθανότητα να μετακινηθεί ένα άτομο στο επόμενο βήμα σε μία κατάσταση, εξαρτάται μόνον από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται, και όχι από το τι έχει συμβεί σε προηγούμενα βήματα.

Τα δεδομένα μίας Μαρκοβιανής διαδικασίας με n διαφορετικές καταστάσεις καταγράφονται σε έναν $n \times n$ **πίνακα μετάβασης** του οποίου το στοιχείο στην i γραμμή και στην j στήλη καταφράφει την πιθανότητα ένα άτομο που βρίσκεται στην κατάσταση j, στο επόμενο βήμα να μετακινηθεί στην κατάσταση i. Αφού τα στοιχεία του πίνακα καταγράφουν πιθανότητες, είναι αριθμοί μεταξύ 0 και 1. Όλα τα άτομα που βρίσκονται σε μία κατάσταση, στο επόμενο βήμα θα πρέπει να βρίσκονται πάλι σε μία κατάσταση, την ίδια ή διαφορετική. Συνεπώς το άθροισμα των πιθανοτήτων σε κάθε στήλη είναι 1.

Ένας Μαρκοβιανός πίνακας είναι ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας που δεν περιέχει αρνητικούς αριθμούς και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι 1. Ένα **διάνυσμα κατανομής** είναι ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, του οποίου το στοιχείο στη θέση i καταγράφει την πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να βρίσκεται στην κατάσταση i.

Παράδειγμα 3.12 Θεωρούμε οτι ο πληθυσμός της Ελλάδας είναι σταθερός στα 10 εκατομμύρια, και τον διακρίνουμε σε δύο καταστάσεις: τους κατοίκους της Αττικής και τους κατοίκους των άλλων περιφερειών. Υποθέτουμε οτι κάθε χρόνο, το 4% του πληθυσμού που κατοικεί εκτός Αττικής μετακινείται στην Αττική, ενώ το 6% του πληθυσμού της Ατικής μετακινείται σε άλλη περιφέρεια. Σε αυτή τη διαδικασία έχουμε δύο καταστάσεις, άρα ο Μαρκοβιανός πίνακας θα έχει διαστάσεις 2×2. Στην πρώτη στήλη βάζουμε την κατάσταση ''κατοικεί εκτός Αττικής'', και στη δεύτερη στήλη την κατάσταση ''κατοικεί στην Αττική''. Με τα παραπάνω δεδομένα έχουμε τον Μαρκοβιανό πίνακα

$$M = \begin{bmatrix} 0,96 & 0,06 \\ 0,04 & 0,94 \end{bmatrix}.$$

Υποθέτουμε οτι το 1970 κατοικούσαν 8 εκατομμύρια εκτός Αττικής και 2 εκατομμύρια στην Αττική. Δηλαδή έχουμε αρχικό διάνυσμα κατανομής $\begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix}$. Στο επόμενο βήμα, το 1971, η κατανομή του πληθυσμού θα είναι

$$\begin{bmatrix} 0,96 & 0,06 \\ 0,04 & 0,94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,78 \\ 0,22 \end{bmatrix},$$

το 1972 θα είναι

$$\begin{bmatrix} 0,96 & 0,06 \\ 0,04 & 0,94 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,762 \\ 0,238 \end{bmatrix},$$

ενώ μετά από k έτη η κατανομή θα έχει γίνει

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,96 & 0,06 \\ 0,04 & 0,94 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

Εάν ο πίνακας M είναι διαγωνιοποιήσιμος, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις δυνάμεις, και να μελετήσουμε τη μακροπρόθεσμη κατανομή του πληθυσμού.

Ας θεωρήσουμε έναν 2×2 Μαρκοβιανό πίνακα,

$$M = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο,

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-a-\lambda & b \\ a & 1-b-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-a-b-\lambda).$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 1 - a - b$, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$x_1 = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad \text{και } x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Θέτουμε $R = \begin{bmatrix} b & -1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ και έχουμε

$$A^k = R \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} R^{-1}.$$

Επιστρέφουμε στο Παράδειγμα 3.12, με την αρχική κατανομή του πληθυσμού $(0,8\,,\,0,2)$, και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} M^k &= \begin{bmatrix} b & -1 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b - \lambda_2^k(0,2b - 0,8a) \\ a + \lambda_2^k(0,2b - 0,8a) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Εάν $0 < a < 1$ και $0 < b < 1$, τότε $0 < a + b < 2$, και $-1 < 1 - a - b < 1$. Συνεπώς $\lambda_2^k \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Για μεγάλα k το διάνυσμα κατανομής τείνει στο $\frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$. Στο παράδειγμα, με $a = 0,04$, $b = 0,06$, η κατανομή του πληθυσμού μεταξύ της υπόλοιπης χώρας και της Αττικής τείνει προς μία αναλογία $3 : 2$. Παρατηρούμε οτι η μακροπρόθεσμη κατανομή δεν εξαρτάται από την αρχική κατανομή, ούτε από τις ακριβείς τιμές των a και b, αλλά μόνον από το λόγο $b : a$.

Δεν υπάρχει πάντα μία μακροπρόθεσμη κατανομή προς την οποία τείνει η Μαρκοβιανή διαδικασία. Στο 2×2 παράδειγμα, εάν $a = b = 1$, τότε $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και οι πληθυσμοί εναλλάσσονται σε κάθε βήμα,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Μία Μαρκοβιανή διαδικασία είναι **κανονική** (regular) εάν κάποια δύναμη του Μαρκοβιανού πίνακα έχει όλα τα στοιχεία γνήσια θετικά. Για τέτοιες διαδικασίες έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Θεώρημα 3.10 *Εάν M είναι ο $n \times n$ πίνακας μίας κανονικής Μαρκοβιανής διαδικασίας, τότε $\lambda_1 = 1$ είναι ιδιοτιμή με πολλαπλότητα 1, και κάθε άλλη ιδιοτιμή λ_i, $i = 2, \ldots, n$ έχει την ιδιότητα $|\lambda_i| < 1$. Η Μαρκοβιανή διαδικασία έχει μακροπρόθεσμη κατανομή, που είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1.*

Η διαδικασία στο Παράδειγμα 3.12 είναι κανονική, αφού ο πίνακας M δεν έχει μηδενικά στοιχεία. Η μακροπρόθεσμη κατανομή που υπολογίσαμε είναι πράγματι ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής 1.

3.5 Ασκήσεις

Άσκηση 3.11 Διαγωνιοποιήστε τους ακόλουθους πίνακες (δηλαδή βρείτε R τέτοιους ώστε $R^{-1}AR$ είναι διαγώνιος πίνακας):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.12 Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και γράψτε δύο διαφορετικούς πίνακες R που διαγωνιοποιούν τον A.

Άσκηση 3.13 Ποιοί από τους ακόλουθους πίνακες δεν μπορούν να διαγωνιοποιηθούν;

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.14 Εάν $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, διαγωνιοποιήστε τον A και υπολογίστε τον πίνακα A^{100}.

Άσκηση 3.15 Παραγοντοποιήστε τους ακόλουθους πίνακες στη μορφή $A = RDR^{-1}$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.6 Ιδιοτιμές γραμμικού τελεστή

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V (όχι υποχρεωτικά πεπερασμένης διάστασης) πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Θα μελετήσουμε γραμμικές απεικονίσεις από τον V στον εαυτό του,

$$L : V \longrightarrow V \,.$$

Μία τέτοια απεικόνιση ονομάζεται **γραμμικός τελεστής** στο V (ή **ενδομορφισμός** του V).

Ορισμός 3.3. Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Οι αριθμοί λ του $\mathbb{K}$ για τους οποίους υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα $v \in V$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$L\,v = \lambda v \tag{3.7}$$

ονομάζονται **ιδιοτιμές** του γραμμικού τελεστή L, ενώ τα *μη μηδενικά* διανύσματα που ικανοποιούν την 3.7 ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του L για την ιδιοτιμή λ. Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του L για την ιδιοτιμή λ, μαζί με το διάνυσμα 0, αποτελεί ένα γραμμικό υπόχωρο του V που ονομάζεται **ιδιόχωρος** του L για την ιδιοτιμή λ.

Δραστηριότητα 3.13 Ελέγξτε οτι πράγματι ο ιδιόχωρος του L για την ιδιοτιμή λ είναι γραμμικός υπόχωρος του V, δηλαδή οτι είναι κλειστός ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου.

Παράδειγμα 3.13 Ο τελεστής $L = a\mathbf{I}_V \ : \ v \mapsto av$ έχει μοναδική ιδιοτιμή a. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του V είναι ιδιοδιάνυσμα του L για την ιδιοτιμή a. Ο ιδιοχώρος του L για την ιδιοτιμή a είναι όλος ο χώρος V.

Παράδειγμα 3.14 Ο τελεστής $L(x,\, y) = (3x,\, \frac{1}{2}y)$ έχει ιδιοδιάνυσμα $(1,\, 0)$ για την ιδιοτιμή 3 και ιδιοδιάνυσμα $(0,\, 1)$ για την ιδιοτιμή $\frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 3.15 Ο τελεστής περιστροφής κατά $\frac{\pi}{2}$ στο $\mathbb{R}^2$, $R(x,\, y) = (-y,\, x)$ δεν έχει καμία ιδιοτιμή στο $\mathbb{R}$.
Ο τελεστής περιστροφής κατά $\frac{\pi}{2}$ στο $\mathbb{C}$, $R(z) = \mathrm{i}z$ έχει ιδιοτιμή i, με ιδιόχωρο όλο το $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 3.16 Θεωρούμε τον τελεστή παραγώγισης στο διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, $D : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, που απεικονίζει κάθε πολυώνυμο $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ στην τυπική παράγωγό του, $D(p(x)) = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1$. Αφού $\deg(D(p(x))) = \deg(p(x)) - 1$, κανένα πολυώνυμο θετικού βαθμού δεν απεικονίζεται σε πολλαπλάσιο του εαυτού του. Η μοναδική ιδιοτιμή του τελεστή D είναι $\lambda = 0$, και ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το σταθερό πολυώνυμο $p(x) = 1$.

Παράδειγμα 3.17 Θεωρούμε τον τελεστή shift στο διανυσματικό χώρο των ακολουθιών με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$, $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, που απεικονίζει κάθε ακολουθία (a_n) στην ακολουθία

(b_n), όπου $b_n = a_{n+1}$. Ο τελεστής shift έχει κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{K}$ ως ιδιοτιμή, με ιδιοδιάνυσμα τις αντίστοιχες γεωμετρικές ακολουθίες: Εάν $\lambda \neq 0$ και x_λ είναι η γεωμετρική ακολουθία $x_{\lambda,n} = a\lambda^n$, τότε $s(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$.

Πρόταση 3.11 *Εάν $L : V \longrightarrow V$ και $M : W \longrightarrow W$ είναι γραμμικοί τελεστές και υπάρχει ισομορφισμός $T : V \longrightarrow W$ τέτοιος ώστε*

$$L = T^{-1} \circ M \circ T$$

τότε οι τελεστές L και M έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Επί πλέον, εάν v είναι ιδιοδιάνυσμα του L για την ιδιοτιμή λ, τότε $T(v)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του M για την ίδια ιδιοτιμή.

Απόδειξη. Για κάθε $v \in V$ έχουμε $L(v) = \lambda v$ εάν και μόνον εάν $T^{-1} \circ M \circ T(v) = \lambda v$, δηλαδή $M \circ T(v) = T(\lambda v) = \lambda T(v)$. Συνεπώς λ είναι ιδιοτιμή του L, με ιδιοδιάνυσμα v, εάν και μόνον εάν λ είναι ιδιοτιμή του M, με ιδιοδιάνυσμα $T(v)$.

□

Λήμμα 3.12 *Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή $L : V \longrightarrow V$ εάν και μόνον εάν $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι μονομορφισμός. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ είναι ο πυρήνας $\ker(L - \lambda \mathbf{I}_V)$, και κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του $\ker(L - \lambda \mathbf{I}_V)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του L για την ιδιοτιμή λ.*

Απόδειξη. Εάν $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι μονομορφισμός, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε $(L - \lambda \mathbf{I}_V)(v) = 0$, δηλαδή $L(v) = \lambda v$, και συνεπώς v είναι ιδιοδιάνυσμα του L και λ ιδιοτιμή του L.

Αντίστροφα, εάν $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του L, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε $L(v) = \lambda v$, και συνεπώς $(L - \lambda \mathbf{I}_V)(v) = 0$, άρα $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι μονομορφισμός.

□

3.7 Πολυώνυμα και τελεστές

Θεωρούμε ένα πολυώνυμο p με συντελεστές στο $\mathbb{K}$,

$$p(t) = a_k t^k + \cdots + a_1 t + a_0 \,.$$

Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι γραμμικός τελεστής στο V, τότε οι δυνάμεις $L^i = L \circ \cdots \circ L$, όπου συνθέτουμε i φορές τον τελεστή L, είναι επίσης γραμμικοί τελεστές στο V. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον τελεστή L στη θέση της μεταβλητής του πολυωνύμου,

$$p(L) = a_k L^k + \cdots + a_1 L + a_0 \mathbf{I}_V \,,$$

και το αποτέλεσμα είναι πάλι ένας γραμμικός τελεστής στο V,

$$p(L) : V \longrightarrow V : v \longmapsto a_k L^k(v) + \cdots + a_1 L(v) + a_0 v\,.$$

Παρατηρούμε οτι εάν $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, οι τελεστές $p(L)$ και $q(L)$ μετατίθενται:

$$p(L)q(L) = (pq)(L) = (qp)(L) = q(L)p(L)\,.$$

3.8 Ύπαρξη ιδιοτιμών

Θεώρημα 3.13 *Κάθε τελεστής σε ένα μη μηδενικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, πάνω από το $\mathbb{C}$, έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή.*

Απόδειξη. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V, $\dim V = n$, ένα γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$. Τότε η συλλογή v, $L(v)$, $L^2(v)$, …, $L^n(v)$ έχει $n+1$ στοιχεία, και συνεπώς είναι γραμμικά εξαρτημένη. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $a_i \in \mathbb{C}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$a_0 v + a_1 L(v) + \cdots + a_n L^n(v) = 0\,.$$

Εάν $a_0 = 0$, τότε κάποιο από τα a_i για $i \geq 1$ είναι διαφορετικό από μηδέν. Εάν $a_0 \neq 0$, αφού $v \neq 0$, πάλι κάποιο από τα a_i για $i \geq 1$ είναι διαφορετικό από μηδέν. Συνεπώς το πολυώνυμο $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ έχει βαθμό k, για $1 \leq k \leq n$. Δηλαδή υπάρχει θετικός ακέραιος $k \leq n$, τέτοιος ώστε $a_k \neq 0$ και $a_i = 0$ για κάθε $i = k+1, \ldots, n$. Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, (Σημειώσεις Επίπεδο και Χώρος, Κεφάλαιο 3) το πολυώνυμο $p(x)$ παραγοντοποιείται σε γινόμενο k διωνύμων, δηλαδή υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_k$ τέτοιοι ώστε

$$p(x) = a_k(x - c_1)\cdots(x - c_k)\,.$$

Συνεπώς ο τελεστής $p(L)$ είναι ίσος με τον τελεστή $a_k(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)$, και

$$a_k(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)(v) = 0\,.$$

Αφού $v \neq 0$, ο τελεστής $(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)$ δεν είναι μονομορφισμός, και συμπεραίνουμε οτι υπάρχει τουλάχιστον ένα i, $1 \leq i \leq k$, για το οποίο η απεικόνιση $L - c_i\mathbf{I}_V$ δεν είναι ενεικονική. Συνεπώς υπάρχει μη μηδενικό $w \in V$ τέτοιο ώστε $(L - c_i\mathbf{I}_V)(w) = 0$, δηλαδή $L(w) = c_i w$, και $\lambda = c_i$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή L.

□

3.9 Τελεστές και πίνακες

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης n και βάση $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ του V. Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι ένας γραμμικός τελεστής, τότε ο πίνακας ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ που παριστάνει τον

L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο πίνακας που έχει στη γραμμή i και στήλη j το στοιχείο a_{ij} που ορίζεται από τη σχέση

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \,.$$

Πρόταση 3.14 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, βάση $\mathcal{B}$ του V, και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Τότε $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή L εάν και μόνον εάν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ που παριστάνει τον L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Εάν $v_{\mathcal{B}}$ συμβολίζει το διάνυσμα συντεταγμένων του διανύσματος $v \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε, από τον ορισμό του ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ έχουμε

$$(L(v))_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}} \,.$$

Συνεπώς $L(v) = \lambda v$ εάν και μόνον εάν ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}} = (\lambda v)_{\mathcal{B}} = \lambda v_{\mathcal{B}}$.

□

Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και L είναι ένας γραμμικός τελεστής στον V, θεωρούμε πίνακες A και B που αντιστοιχούν στον L ως προς διαφορετικές βάσεις του V. Γνωρίζουμε από την Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα οτι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, και συνεπώς οτι $\det A = \det B$. Εύκολα βλέπουμε οτι οι πίνακες πολυωνύμων $A - \lambda \mathbf{I}_n$ και $B - \lambda \mathbf{I}_n$ είναι επίσης όμοιοι, και συνεπώς τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των δύο πινάκων είναι ίσα,

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = \det(B - \lambda \mathbf{I}_n) \,.$$

Συμπεραίνουμε οτι μπορούμε να ορίσουμε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** $\chi_L(\lambda)$ του τελεστή L, να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα του L ως προς οποιαδήποτε βάση του V.

Η ακόλουθη πρόταση είναι συνέπεια του αντίστοιχου αποτελέσματος για πίνακες.

Πρόταση 3.15 *Θεωρούμε τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ διαφορετικές ιδιοτιμές του L, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1, \ldots, v_m$. Τότε το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Πόρισμα 3.16 *Κάθε τελεστής στο διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, έχει το πολύ $\dim V$ διαφορετικές ιδιοτιμές.*

□

3.10 Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Θεωρούμε έναν γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$ σε ένα διανυσματικό χώρο V. Γνωρίζουμε οτι τα σύνολα $\ker L$ και $\operatorname{im} L$ είναι υπόχωροι του V, και εύκολα ελέγχουμε οτι

$$L(\ker L) \;\subseteq\; \ker L$$

$$L(\operatorname{im} L) \quad \subseteq \quad \operatorname{im} L\,.$$

Ο ιδιόχωρος X_λ μίας ιδιοτιμής του L είναι επίσης ένας υπόχωρος του V με την ιδιότητα $L(X_\lambda) \subseteq X_\lambda$.

Ορισμός 3.4. $L : V \longrightarrow V$ γραμμικός τελεστής. Ο υπόχωρος $X \subseteq V$ ονομάζεται **αναλλοίωτος** υπόχωρος από τον τελεστή L, εάν

$$L(X) \subseteq X\,.$$

Προσέξτε οτι δεν υποθέτουμε οτι $L(X) = X$, ούτε οτι $L^{-1}(X) \subseteq X$.

Παράδειγμα 3.18 Για κάθε τελεστή $L : V \longrightarrow V$, οι υπόχωροι $\{0\}$, V, $\ker L$ και $\operatorname{im} L$ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του L.

Παράδειγμα 3.19 Για κάθε τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και κάθε ιδιοτιμή λ του L, οι υπόχωροι του ιδιόχωρου της λ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του L.

Παράδειγμα 3.20 Θεωρούμε τον τελεστή $L(x,\, y,\, z) = (x + z,\, y,\, z - y)$. Ο υπόχωρος $U = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{K}^3 : y = 0\}$ είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή L: $L(x,\, 0,\, z) = (x + z,\, 0,\, z) \in U$. Ο υπόχωρος $W = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{K}^3 : x = y = 0\}$ δεν είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή L: $L(0,\, 0,\, 1) = (1,\, 0,\, 1) \notin W$.

Παράδειγμα 3.21 Θεωρούμε τον τελεστή παραγώγισης στο διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, $D : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, και τον υπόχωρο $\mathbb{K}_m[x]$των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με m. Αφού κάθε πολυώνυμο βαθμού k απεικονίζεται σε πολυώνυμο μικρότερου βαθμού, ο υπόχωρος $\mathbb{K}_m[x]$ είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή D.

Παράδειγμα 3.22 Θεωρούμε τον τελεστή shift στο διανυσματικό χώρο των ακολουθιών με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$, $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, και τον υπόχωρο X των ακολουθιών που είναι φραγμένες. Αφού μία φραγμένη ακολουθία παραμένει φραγμένη όταν ‘‘ξεχάσουμε’’ τον πρώτο όρο της, ο υπόχωρος X είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή shift.

Πρόταση 3.17 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Εάν X και Y είναι υπόχωροι του V αναλλοίωτοι από τον L, τότε $X \cap Y$ και $X + Y$ είναι υπόχωροι αναλλοίωτοι από τον L.*

Πρόταση 3.18 *Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι τελεστής στο χώρο V, και X είναι υπόχωρος του V αναλλοίωτος από τον L, με $\dim V = n$ και $\dim X = k$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλη βάση του V έτσι ώστε ο πίνακας του L ως προς την επιλεγμένη βάση να είναι της μορφής*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

με ένα $(n-k) \times k$ μηδενικό μπλόκ κάτω αριστερά.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε οτι κάθε βάση $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του X μπορεί να επεκταθεί σε βάση $\{x_1, \ldots, x_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ του V. Εάν X είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και $[a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\{x_1, \ldots, x_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ τότε

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij} v_i \, .$$

Όμως $L(x_j) \in X$ και συνεπώς $a_{ij} = 0$ για $i = k+1, \ldots, n$.

Άρα ο πίνακας (a_{ij}) έχει ένα $(n-k) \times k$ μηδενικό μπλόκ κάτω αριστερά.

□

Από τις ιδιότητες της ορίζουσας στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, γνωρίζουμε οτι για ένα πίνακα της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} B & F \\ 0 & C \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

ισχύει $\det A = \det B \det C$. Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα στον πίνακα πολυωνύμων $A - \lambda\mathbf{I}$, έχουμε την ακόλουθη Πρόταση[4].

Πρόταση 3.19 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Εάν X υπόχωρος του V αναλλοίωτος από τον L, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $L|_X$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του L,*

$$\chi_{L|_X}(\lambda) \,|\, \chi_L(\lambda) \, .$$

Όταν ο διανυσματικός χώρος V διασπάται σε ευθύ άθροισμα δύο ή περισσότερων υπόσωρων, κάθε ένας εκ των οποίων είναι αναλλοίωτος από έναν τελεστή, τότε και ο πίνακας μπορεί να πάρει τη μορφή διαγώνιου πίνακα σε μπλοκ. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για δύο υπόχωρους, και αφήνουμε ως άσκηση τη γενίκευση, με χρήση επαγωγής.

[4] Ο συμβολισμός $a \,|\, b$ σημαίνει οτι το a διαιρεί το b.

Πρόταση 3.20 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης n, και υπόχωρους X και Y του V, τέτοιους ώστε*

$$V = X \oplus Y\,,$$

με βάσεις $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_k\}$ του X και $\mathcal{C} = \{y_{k+1}, \ldots, y_n\}$ του Y. Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι γραμμικός τελεστής και X, Y είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του L, τότε ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{S} = \{x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n\}$ είναι διαγώνιος σε μπλοκ, δηλαδή έχει τη μορφή

$${}_{\mathcal{S}}L_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

όπου B είναι ο $k \times k$ πίνακας του τελεστή $L|_X$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ και C είναι ο $(n-k)\times(n-k)$ πίνακας του τελεστή $L|_Y$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.
Τότε για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του L ισχύει

$$\chi_L(\lambda) = \chi_{L|_X}(\lambda)\,\chi_{L|_Y}(\lambda)\,.$$

Απόδειξη. Εάν ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{S}$ είναι $[a_{ij}]$, τότε για $j = 1, \ldots, k$,

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij}y_i\,.$$

Αλλά $L(x_j) \in X$, άρα $a_{ij} = 0$ για $i = k+1, \ldots, n$.

Παρόμοια, για $j = k+1, \ldots, n$, $a_{ij} = 0$ για $i = 1, \ldots, k$.

Η ιδιότητα των χαρακτηριστικών πολυωνύμων είναι συνέπεια της 3.8.

□

3.11 Βάσεις από ιδιοδιανύσματα

Πρόταση 3.21 *Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι γραμμικός τελεστής, και ο διανυσματικός χώρος V έχει μία πεπερασμένη βάση από ιδιοδιανύσματα του L, τότε ο πίνακας του L ως προς αυτήν τη βάση είναι διαγώνιος, με τις ιδιοτιμές του τελεστή στη διαγώνιο.*

Απόδειξη. Έστω $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μία βάση από ιδιοδιανύσματα, και $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Τότε

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i = \lambda_j v_j\,.$$

Αφού τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές είναι μοναδικοί, και

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad i \neq j \\ \lambda_j & \text{εάν} \quad i = j\,. \end{cases}$$

Συνεπώς ο πίνακας $[a_{ij}]$ είναι διαγώνιος.

□

Είναι προφανές οτι ισχύει και το αντίστροφο: εάν ο πίνακας του τελεστή L ως προς κάποια βάση είναι διαγώνιος, τότε τα στοιχεία της βάσης είναι ιδιοδιανύσματα του L.

Εάν $\dim V = n$ και ο L έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε υπάρχει μία βάση του V η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του L, και ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι διαγώνιος. Έχουμε δει όμως παραδείγματα όπου υπάρχουν λιγότερα από n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, και δεν υπάρχει βάση ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι διαγώνιος.

Υπενθυμίζουμε οτι η γεωμετρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι η διάσταση του ιδιόχωρου της ιδιοτιμής.

Πρόταση 3.22 *Η γεωμετρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι ίση ή μικρότερη από την αλγεβρική πολλαπλότητα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι η ιδιοτιμή λ_1 έχει γεωμετρική πολλαπλότητα k, και επιλέγουμε γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ_1, $v_1, \dots, v_k$. Συμπληρώνουμε το σύνολο $\{v_1, \dots, v_k\}$ σε βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ του V. Αφού για $j = 1, \dots, k$, $L(v_j) = \lambda_1 v_j$, η στήλη j του πίνακα $A =_{\mathcal{B}} L_{\mathcal{B}}$ έχει στοιχεία $a_{jj} = \lambda_1$ και $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$. Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_L(\lambda)$ διαιρείται από το $(\lambda - \lambda_1)^k$. Άρα k δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από την πολλαπλότητα της ρίζας λ_1 στο χ_L.

□

3.12 Τριγωνικοί πίνακες

Υπενθυμίζουμε οτι ένας $n \times n$ πίνακας είναι *άνω τριγωνικός* όταν έχει μηδενικά σε όλες τις θέσεις κάτω από τη διαγώνιο, δηλαδή όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$. Ένας άνω τριγωνικός πίνακας είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν έχει μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε οτι πάνω από το $\mathbb{C}$ μπορούμε πάντα να βρούμε μία βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι άνω τριγωνικός.

Πρόταση 3.23 *Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ του V. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο πίνακας A του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι άνω τριγωνικός*
2. *$L(v_j) \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$ για $j = 1, \dots, n$.*
3. *Για κάθε $j = 1, \dots, n$ ο υπόχωρος $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$ είναι αναλλοίωτος από τον L.*

Απόδειξη. Το 2 σημαίνει οτι το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει μηδενικά στις τελευταίες $n - j$ θέσεις, που είναι ακριβώς το ίδιο με το 1. Είναι προφανές οτι το 3 συνεπάγεται το 2. Θα δείξουμε οτι το 2 συνεπάγεται το 3. Εάν $v \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$, τότε

$v = a_1 v_1 + \cdots + a_j v_j$. Εάν ισχύει το 2, για κάθε $i = 1, \ldots, j$

$$L(v_i) \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_j \rangle .$$

Συνεπώς

$$L(v) = a_1 L(v_1) + \cdots + a_j L(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle .$$

□

Ορισμός 3.5. Ένας $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία στο $\mathbb{K}$ είναι **τριγωνοποιήσιμος (πάνω από το** $\mathbb{K}$**)** εάν είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα U, δηλαδή εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας R με στοιχεία στο $\mathbb{K}$ τέτοιος ώστε $A = RUR^{-1}$.
Ένας τελεστής $L : V \longrightarrow V$ είναι **τριγωνοποιήσιμος** εάν υπάρχει μία διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι άνω τριγωνικός.

Πρόταση 3.24 *Υποθέτουμε οτι ο τελεστής $L : V \longrightarrow V$ είναι τριγωνοποιήσιμος. Τότε οι ιδιοτιμές του L είναι ακριβώς τα στοιχεία της διαγωνίου του τριγωνικού πίνακα που παριστάνει τον L.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον άνω τριγωνικό πίνακα A της L, ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Τότε η απεικόνιση $L - \lambda \mathbf{I}_V$, για $\lambda \in \mathbb{K}$, έχει πίνακα ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν λ είναι ίσο με κάποιο από τα στοιχεία της διαγωνίου, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Άρα οι ιδιοτιμές του L είναι ακριβώς $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

□

Θεώρημα 3.25 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε ο τελεστής L είναι τριγωνοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στη διάσταση του V. Εάν $\dim V = 1$, αρκεί να παρατηρήσουμε οτι κάθε 1×1 πίνακας είναι άνω τριγωνικός.

Υποθέτουμε οτι $\dim V = n \geq 2$. Αφού βρισκόμαστε πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς, από το Θεώρημα 3.13, ο L έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή λ_1. Έστω u_1 ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ_1. Συμπληρώνουμε το $\{u_1\}$ σε βάση $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ του V, και θεωρούμε τον πίνακα του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, $A = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$. Η πρώτη στήλη του A περιέχει το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(u_1) = \lambda_1 u_1$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Συνεπώς ο A έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το V ως ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $V_1 = \langle u_1 \rangle$ και $U = \langle u_2, \ldots, u_n \rangle$, έτσι ώστε κάθε $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $v = a_1 u_1 + u$, για $a_1 \in \mathbb{C}$ και $u \in U$. Έχουμε απεικονίσεις $j : U \longrightarrow V : u \mapsto u$ και $p : V \longrightarrow U : v \mapsto u$, και ορίζουμε

$$M = p \circ L \circ j : U \longrightarrow U\,.$$

Για $i = 2, \ldots, n$, $M(u_i) = a_{2i}u_2 + \cdots + a_{ni}u_n$, όπου $(a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ είναι η στήλη του πίνακα D που αντιστοιχεί στην i στήλη του πίνακα A. Συνεπώς D είναι ο πίνακας που παριστάνει την απεικόνιση M ως προς τη βάση $\{u_2, \ldots, u_n\}$. Αφού $\dim U = n - 1$, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει βάση $\mathcal{W} = \{w_2, \ldots, w_n\}$, ως προς την οποία ο πίνακας της απεικόνισης M είναι άνω τριγωνικός. Εξετάζουμε τώρα τον πίνακα του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}' = \{u_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Αυτός έχει τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

όπου T είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας ο οποίος παριστάνει την απεικόνιση M ως προς τη βάση $\mathcal{W}$. Συνεπώς ο T είναι άνω τριγωνικός. Συμπεραίνουμε οτι ο πίνακας B του τελεστή L ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$ είναι άνω τριγωνικός.

□

Πρόταση 3.26 *Κάθε τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{C}$ είναι τριγωνοποιήσιμος.*

Παράδειγμα 3.23 Στο χώρο $\mathbb{C}_3[x]$ των πολυωνύμων βαθμού ίσου ή μικρότερου από 3, με την κανονική διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$, ο τελεστής παραγώγισης $D : \mathbb{C}_3[x] \longrightarrow \mathbb{C}_3[x]$ παριστάνεται από τον πίνακα

$${}_{\mathcal{B}}D_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε οτι ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός. Για να τον μετατρέψουμε σε άνω τριγωνικό αρκεί μία αναδιάταξη της βάσης, $\mathcal{F} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{F}$ είναι

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

με $R^{-1} = R$. Άρα ο άνω τριγωνικός πίνακας είναι

$${}_{\mathcal{F}}D_{\mathcal{F}} = R\,{}_{\mathcal{B}}D_{\mathcal{B}}R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ας εφαρμόσουμε τη διαδικασία της απόδειξης του Θεωρήματος 3.25 για να τριγωνοποιήσουμε τον τελεστή D. Ο D έχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda = 0$, με ιδιοδιάνυσμα το σταθερό πολυώνυμο 1. Επιλέγουμε ως πρώτο στοιχείο της βάσης αυτό το πολυώνυμο, και θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{C} = \{1, x^3, x^2, x\}$ ως προς την οποία ο πίνακας του τελεστή D είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο κάτω δεξιά 3×3 πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

παριστάνει τον τελεστή $M : \langle x^3, x^2, x\rangle \longrightarrow \langle x^3, x^2, x\rangle$ που απεικονίζει τα x^3, x^2, x στα $3x^2, 2x, 0$ αντίστοιχα. Αυτός ο τελεστής έχει τριγωνικό πίνακα ως προς τη βάση $\mathcal{C}' = \{x, x^2, x^3\}$. Από αυτή τη διαδικασία, καταλήγουμε οτι ως προς τη βάση $\{1, x, x^2, x^3\} = \mathcal{F}$ ο πίνακας του τελεστή D είναι άνω τριγωνικός, που επαληθεύει το προηγούμενο αποτέλεσμα.

Όταν ο διανυσματικός χώρος V είναι πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών, δεν είναι δεδομένη η ύπαρξη ιδιοτιμών. Σε αυτή την περίπτωση για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη βάσης ως προς την οποία ο τελεστής είναι άνω τριγωνικός, πρέπει να υποθέσουμε οτι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1. Διατυπώνουμε το αποτέλεσμα στην περίπτωση ενός $n \times n$ πίνακα.

Θεώρημα 3.27 *Θεωρούμε $n \times n$ πίνακα A με στοιχεία στο $\mathbb{K}$. Τότε ο A είναι τριγωνοποιήσιμος εάν και μόνον εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)$ είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1 πάνω από το $\mathbb{K}$.*

Απόδειξη. Εάν ο A είναι τριγωνοποιήσιμος, θεωρούμε τριγωνικό πίνακα B όμοιο με τον A, με στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ στη διαγώνιο. Τότε $\det(A-\lambda\mathbf{I}) = \det(B-\lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$, και συνεπώς $\chi_A(\lambda)$ είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1 πάνω από το $\mathbb{K}$.

Εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων πάνω από το $\mathbb{K}$, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.25 θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Έστω λ_1 τέτοιο ώστε $(\lambda_1-\lambda)$ διαιρεί το $\chi_A(\lambda)$. Τότε λ_1 είναι ιδιοτιμή του A· έστω u_1 ένα ιδιοδιάνυσμα της λ_1. Θεωρούμε αντιστρέψιμο πίνακα R με πρώτη στήλη u_1. Τότε $R^{-1}u_1$ είναι η πρώτη στήλη του ταυτοτικού πίνακα $\mathbf{I}_n$, και $R^{-1}AR$ έχει πρώτη στήλη $R^{-1}Au_1 = \lambda_1 R^{-1}u_1$. Συνεπώς

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

όπου $b = (b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$ και B είναι $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας. Από την Πρόταση 3.8, $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)\chi_B(\lambda)$, και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1. Από την επαγωγική υπόθεση, ο πίνακας B είναι τριγωνοποιήσιμος. Άρα υπάρχει $(n-1)\times(n-1)$ αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε $S^{-1}BS$ να είναι άνω τριγωνικός. Θέτουμε $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} U^{-1}R^{-1}ARU &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & bS \\ 0 & S^{-1}BS \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

που είναι άνω τριγωνικός.

□

Παράδειγμα 3.24 Θα εξετάσουμε εάν ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι τριγωνοποιήσιμος. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $\chi_A(x) = -x(x-2)^2$. Αφού το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων ο πίνακας είναι τριγωνοποιήσιμος.

Για να βρούμε τον πίνακα ο οποίος τριγωνοποιεί τον A, υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα. Ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 0 είναι το $(1, 1, 0)$. Η ιδιοτιμή 2 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2, αλλά γεωμετρική πολλαπλότητα 1: υπάρχει μόνον ένα γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα. Επιλέγουμε το $(1, 1, -2)$. Αυτά τα δύο διανύσματα θα είναι οι δύο πρώτες στήλες του πίνακα R που τριγωνοποιεί τον πίνακα A. Για την τρίτη στήλη μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα έτσι ώστε να έχουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα. Επιλέγουμε το διάνυσμα $(1, -1, 0)$.

Ο πίνακας $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ τριγωνοποιεί τον A. Δηλαδή υπάρχει άνω τριγωνικός πίνακας U τέτοιος ώστε $AR = RU$. Αφού οι δύο πρώτες στήλες του R είναι τα ιδιοδιανύσματα του A, στις δύο πρώτες στήλες του U έχουμε τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Άρα $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, όπου $(a,\, b,\, c)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε $(a,\, b,\, c) = (-1,\, 1,\, 2)$, συνεπώς $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = R^{-1}AR$.

3.13 Θεώρημα Cayley – Hamilton

Παράδειγμα 3.25 Πριν διατυπώσουμε το Θεώρημα Cayley – Hamilton θα υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix},$$

δηλαδή του $k \times k$ πίνακα $[b_{ij}]$, με $b_{ij} = 0$ όταν $j \neq k$ και $i \neq j+1$, $b_{(j+1)\,j} = 1$ για $j = 1, \dots, k-1$ και $b_{ik} = a_i$. Αυτό είναι ίσο με την ορίζουσα

$$\det(B - x\mathbf{I}_k) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -x & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x & a_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\det(B - x\mathbf{I}_n)$ θα χρησιμοποιήσουμε απαλοιφή από κάτω προς τα επάνω, για να απαλείψουμε τα $-x$ στη διαγώνιο. Αφαιρώντας $-x$ φορές την τελευταία γραμμή από την προτελευταία, έχουμε

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -x & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} + a_k x - x^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix}.$$

Συνεχίζουμε, αφαιρώντας $-x$ φορές τη γραμμή i από τη γραμμή $i-1$, για $i = k-1, k-2, \dots, 2$, και καταλήγουμε με την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 + a_2 x + \dots + a_k x^{k-1} - x^k \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 + a_3 x + \dots + a_k x^{k-2} - x^{k-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} + a_k x - x^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix},$$

την οποία αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή και βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(B - x\mathbf{I}) \\ &= (-1)^{k+1}(a_1 + a_2 x + \dots + a_k x^{k-1} - x^k) \\ &= (-1)^k (x^k - a_k x^{k-1} - \dots - a_2 x - a_1). \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.28 (Cayley – Hamilton) *Εάν $\chi_L(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή L, σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, τότε ο τελεστής*

$$\chi_L(L) = b_n L^n + \dots + b_1 L + b_0 \mathbf{I}_V$$

είναι ο μηδενικός τελεστής: για κάθε $v \in V$, $\chi_L(L)(v) = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι $\chi_L(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$. Θα δείξουμε οτι ο τελεστής $\chi_L(L) = b_n L^n + \dots + b_1 L + b_0 \mathbf{I}_V$ παίρνει την τιμή 0 σε κάθε $v \in V$, και συνεπώς οτι είναι ο μηδενικός τελεστής.

Εάν $v = 0$ τότε προφανώς $\chi_L(L)(v) = 0$. Υποθέτουμε οτι $v \neq 0$. Εάν $\dim V = n$, θεωρούμε τη συλλογή των διανυσμάτων

$$v_1 = v,\ v_2 = L(v),\ v_3 = L^2(v),\ \dots,\ v_{n+1} = L^n(v).$$

Αφού αυτή περιέχει $n+1$ διανύσματα, είναι γραμμικά εξαρτημένη. Από την Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε οτι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε η συλλογή

$v_1, \ldots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη, ενώ η συλλογή $v_1, \ldots, v_{k+1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένη και υπάρχουν $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε

$$v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \,.$$

Επεκτείνουμε το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\}$ σε βάση του V,

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\} \,.$$

Παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} L(v_1) &= v_2 \\ L(v_2) &= v_3 \\ &\vdots \\ L(v_{k-1}) &= v_k \\ L(v_k) &= v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει οτι ο υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ είναι αναλλοίωτος από τον L και συνεπώς οτι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει τη μορφή

$${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} .$$

Ο $k \times k$ πίνακας A έχει στη στήλη j τις k πρώτες συντεταγμένες του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Εάν $j = 1, \ldots, k-1$, $L(v_j) = v_{j+1}$, άρα $a_{(j+1)j} = 1$, και $a_{ij} = 0$ για $i \neq j+1$. Δηλαδή ο πίνακας έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix} .$$

Γνωρίζουμε οτι

$$\begin{aligned} \chi_L(x) &= \det({}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} - x\mathbf{I}_n) \\ &= \det(A - x\mathbf{I}_k)\det(D - x\mathbf{I}_{n-k}) \\ &= \chi_A(x)\chi_D(x) \end{aligned}$$

ενώ από το Παράδειγμα 3.25 έχουμε οτι

$$\chi_A(x) = (-1)^k (x^k - a_k x^{k-1} - \cdots - a_2 x - a_1) \,.$$

Αντικαθιστούμε L για το x και υπολογίζουμε την τιμή του τελεστή $\chi_A(L)$ στο v:

$$\begin{aligned}\chi_A(L)(v) &= (-1)^k(L^k(v) - a_k L^{k-1}(v) - \cdots - a_2 L(v) - a_1 v) \\ &= (-1)^k(v_{k+1} - a_k v_k - \cdots - a_2 v_2 - a_1 v_1) \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Αφού οι τελεστές $\chi_A(L)$ και $\chi_D(L)$ μετατίθενται,

$$\chi_L(L)(v) = \chi_D(L)\chi_A(L)(v) = 0\,.$$

Τέλος, αφού αυτό ισχύει για κάθε $v \in V$, $\chi_L(L)$ είναι ο μηδενικός τελεστής.

□

Παράδειγμα 3.26 Θεωρούμε τον τελεστή $L(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$. Ο πίνακας του L ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_L(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4\,.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα, ο τελεστής $\chi_L(L)$ είναι ο μηδενικός τελεστής και ο πίνακας $\chi_A(A) = 0$. Πράγματι

$$\chi_A(A) = A^2 - 3A - 4\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Το Θεώρημα Cayley - Hamilton επιτρέπει να απλοποιούμε παραστάσεις με πίνακες, ή να εκφράζουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα ως πολυώνυμο. Αφού $A^2 = 3A + 4\mathbf{I}_2$,

$$\begin{aligned}A^3 &= 3A^2 + 4A = 3(3A + 4\mathbf{I}_2) + 4A = 13A + 12\mathbf{I}_2\,, \\ A^4 &= 13A^2 + 12A = 13(3A + 4\mathbf{I}_2) + 12A = 51A + 52\mathbf{I}_2\,,\ \text{κ.ο.κ.}\end{aligned}$$

Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ δεν είναι μηδέν, το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, και ο A είναι αντιστρέψιμος. Αφού $A^2 - 3A = 4\mathbf{I}_2$, έχουμε $A - 3\mathbf{I}_2 = 4A^{-1}$ και συνεπώς $A^{-1} = \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}\mathbf{I}_2$.

Παράδειγμα 3.27 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

που έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 7$. Από το Θεώρημα Cayley – Hamilton υπολογίζουμε

$$A^3 = 5A^2 - 8A + 7\mathbf{I}_3\,,$$