5.11 Κανονικοί τελεστές

Οι ερμιτιανοί δεν είναι οι μόνοι τελεστές που διαγωνιοποιούνται από ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα. Για τελεστές σε μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους, μπορούμε να διατυπώσουμε ένα απλό κριτήριο που χαρακτηρίζει τους ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμους τελεστές.

Ορισμός 5.13. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο. Ένας τελεστής $L : V \longrightarrow V$ λέγεται **κανονικός** εάν

$$L \circ L^* = L^* \circ L\,.$$

Εάν A είναι ο πίνακας του τελεστή L ως προς μία ορθοκανονική βάση του V, τότε ο πίνακας του τελεστή L^* είναι ο συζυγής πίνακας A^*, και ο τελεστής L είναι κανονικός εάν και μόνον εάν $AA^* = A^*A$.

Παράδειγμα 5.25 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ και τον τελεστή $T_A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$. Τότε $A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ και

$$AA^* = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = A^*A\,,$$

άρα T_A είναι κανονικός τελεστής στο $\mathbb{C}^2$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Οι ιδιοτιμές του T_A είναι $2+3\mathrm{i}$, $2-3\mathrm{i}$, και τα ιδιοδιανύσματα $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i},\,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathrm{i},\,1)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^2$. Ως προς αυτή τη βάση, ο πίνακας του T_A είναι ο

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2-3\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Λήμμα 5.19 *Εάν V είναι διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, L είναι κανονικός τελεστής στον V και v είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ, τότε v είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του τελεστή L^* για την ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τελεστή $L - \lambda\mathbf{I}$, και έχουμε

$$\begin{aligned}(L-\lambda\mathbf{I})\circ(L-\lambda\mathbf{I})^* &= (L-\lambda\mathbf{I})\circ(L^*-\bar{\lambda}\mathbf{I}) = L\circ L^* - \lambda L^* - \bar{\lambda}L + |\lambda|^2\mathbf{I}\,,\\ (L-\lambda\mathbf{I})^*\circ(L-\lambda\mathbf{I}) &= (L^*-\bar{\lambda}\mathbf{I})\circ(L-\lambda\mathbf{I}) = L^*\circ L - \lambda L^* - \bar{\lambda}L + |\lambda|^2\mathbf{I}\,,\end{aligned}$$

και αφού L είναι κανονικός, $L - \lambda\mathbf{I}$ είναι επίσης κανονικός.

Για το ιδιοδιάνυσμα v ισχύει $(L-\lambda\mathbf{I})(v) = 0$. Άρα

$$\begin{aligned}0 = \langle (L-\lambda\mathbf{I})(v),\,(L-\lambda\mathbf{I})(v)\rangle &= \langle v,\,(L-\lambda\mathbf{I})^*\circ(L-\lambda\mathbf{I})(v)\rangle\\ &= \langle v,\,(L-\lambda\mathbf{I})\circ(L-\lambda\mathbf{I})^*(v)\rangle\\ &= \langle (L-\lambda\mathbf{I})^*(v),\,(L-\lambda\mathbf{I})^*(v)\rangle\,,\end{aligned}$$

δηλαδή $(L^* - \bar{\lambda}\mathbf{I})(v) = 0$ και v είναι ιδιοδιάνυσμα του L^* για την ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$.

$\square$

Λήμμα 5.20 *Τα ιδιοδιανύσματα ενός κανονικού τελεστή για διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη. Εάν λ_1, λ_2 είναι δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του τελεστή L, και v_1, v_2 είναι αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα,

$$\begin{aligned} \lambda_1\langle v_1, v_2\rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle \\ &= \langle L(v_1), v_2\rangle \\ &= \langle v_1, L^*(v_2)\rangle \\ &= \langle v_1, \bar{\lambda}_2 v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle\,. \end{aligned}$$

Αφού $\lambda_1 \neq \lambda_2$, συμπεραίνουμε οτι $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

$\square$

Θεώρημα 5.21 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης $\dim V = n$ πάνω από το $\mathbb{C}$, με εσωτερικό γινόμενο, και τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Ο τελεστής L είναι κανονικός εάν και μόνον εάν ο L είναι μοναδιαία διαγωνιοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση του V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του L. Ως προς αυτή τη βάση, ο πίνακας του L είναι διαγώνιος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι υπάρχει ορθοκανονική βάση του V από ιδιοδιανύσματα του L. Ο πίνακας του L ως προς αυτή τη βάση είναι

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

και ο πίνακας του συζυγούς τελεστή L^* ως προς την ίδια βάση είναι

$$\Lambda^* = \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}.$$

Αφού $\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda$, έπεται οτι $L \circ L^* = L^* \circ L$ και ο L είναι κανονικός.

Αντίστροφα, υποθέτουμε οτι ο τελεστής L είναι κανονικός. Ο L έχει μία ιδιοτιμή $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, με ιδιοδιάνυσμα v_1. Θεωρούμε τον υπόχωρο $W_1 = \langle v_1\rangle^\perp$ των διανυσμάτων που είναι ορθογώνια προς το v_1, και θέτουμε $V_1 = W_1$. Εάν $w \in V_1$, τότε

$$\langle v_1, L(w)\rangle = \langle L^*(v_1), w\rangle = \bar{\lambda}_1\langle v_1, w\rangle = 0\,.$$

Άρα $L(w) \in V_1$, και V_1 είναι αναλλοίωτος υπόχωρος του L. Άρα υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα v_2 του L που ανήκει στον υπόχωρο V_1. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε οτι ο υπόχωρος $W_2 = \langle v_2\rangle^\perp$

είναι αναλλοίωτος από τον L. Θέτουμε $V_2 = V_1 \cap W_2$, και παρατηρούμε οτι V_2 είναι υπόχωρος του V_1 και είναι αναλλοίωτος από τον L.

Υποθέτουμε οτι για $k < n$ έχουμε βρεί ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ του L τέτοια ώστε $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ για $i \neq j$, και $V_k = \langle v_1 \rangle^\perp \cap \cdots \langle v_k \rangle^\perp$ είναι υπόχωρος του V αναλλοίωτος από τον L. Τότε υπάρχει ιδιοδιάνυσμα v_{k+1} του L στον V_k, και ο υπόχωρος $V_{k+1} = V_k \cap \langle v_{k+1} \rangle^\perp$ είναι αναλλοίωτος από τον L.

Αφού $\dim V < \infty$, καταλήγουμε σε βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του V, που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του L. Θέτουμε $q_i = \frac{1}{\langle v_i, v_i \rangle^{1/2}} v_i$, και $\{q_1, \ldots, q_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V από ιδιοδιανύσματα του L.

$\square$