5.7 Ερμιτιανοί τελεστές

Για έναν τελεστή L σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, έχουμε δει οτι εάν υπάρχει βάση του V η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του L τότε ο πίνακας του L ως προς αυτή τη βάση είναι διαγώνιος. Τώρα θα δούμε οτι σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να δώσουμε συγκεκριμένα κριτήρια για να συμβαίνει αυτό και μάλιστα η βάση να αποτελείται από ορθογώνια διανύσματα.

Σε αυτό το κεφάλαιο όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$ ή το σώμα $\mathbb{R}$.

Ορισμός 5.8. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο και ένα γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Ο τελεστής L ονομάζεται **ερμιτιανός** εάν για κάθε $u, v \in V$,

$$\langle L(u), v\rangle = \langle u, L(v)\rangle .$$

Ένας ερμιτιανός τελεστής σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο ονομάζεται **συμμετρικός**.

Παράδειγμα 5.17 Θεωρούμε τον τελεστή $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (x+2y, 2x)$. Ως προς το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο έχουμε

$$\langle L(u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = \langle (u_1 + 2u_2, 2u_1), (v_1, v_2)\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_1 + 2u_1v_2$$

και

$$\langle (u_1, u_2), L(v_1, v_2)\rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1 + 2v_2, 2v_1)\rangle = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 .$$

Ο τελεστής L είναι συμμετρικός.

Παράδειγμα 5.18 Θεωρούμε τον τελεστή $M : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $L(z, w) = (z + \mathrm{i}w, -\mathrm{i}z)$. Ως προς το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^2$ έχουμε

$$\langle L(u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = \langle (u_1 + \mathrm{i}u_2, -\mathrm{i}u_1), (v_1, v_2)\rangle = u_1\bar{v}_1 + \mathrm{i}u_2\bar{v}_1 - \mathrm{i}u_1\bar{v}_2$$

και

$$\langle (u_1, u_2), L(v_1, v_2)\rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1 + \mathrm{i}v_2, -\mathrm{i}v_1)\rangle = u_1\bar{v}_1 + u_1\bar{\mathrm{i}}\bar{v}_2 + u_2(-\bar{\mathrm{i}})\bar{v}_1 .$$

Ο τελεστής L είναι ερμιτιανός.

Ορισμός 5.9. Θεωρούμε έναν τετραγωνικό μιγαδικό πίνακα $A = [a_{ij}]$. Ο **συζυγής** (ή **αναστροφοσυζυγής**) του πίνακα A είναι ο πίνακας $A^* = [b_{ij}]$, όπου

$$b_{ij} = \bar{a}_{ji} .$$

Δηλαδή οι όροι του πίνακα A^* είναι οι μιγαδικοί συζυγείς των όρων του ανάστροφου του A. Εάν ο πίνακας A είναι πραγματικός, τότε $A^* = A^T$.

Παράδειγμα 5.19 Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 2 & 3+\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 2 & 3-\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

και

$$A^* = (\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 5.10. Ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας A ονομάζεται **ερμιτιανός** εάν είναι ίσος με τον συζυγή του, $A^* = A$.
Ένας ερμιτιανός πίνακας του οποίου όλοι οι όροι είναι πραγματικοί αριθμοί είναι **συμμετρικός**.

Παρατηρούμε οτι τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί.

Λήμμα 5.9 *Θεωρούμε ερμιτιανό τελεστή $L : V \to V$ σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, και ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του V. Τότε ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ερμιτιανός,*

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Εάν $A = [a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$,

$$L(u_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_k\,.$$

Αλλά τότε

$$\begin{aligned} \langle L(u_j), u_i \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_k, u_i \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle a_{kj} u_k, u_i \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \langle u_k, u_i \rangle \\ &= a_{ij}\,, \end{aligned}$$

αφού η βάση είναι ορθοκανονική. Εξ άλλου,

$$\langle u_j, L(u_i) \rangle = \left\langle u_j, \sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k \right\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n} \langle u_j,\, a_{ki} u_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki} \langle u_j,\, u_k \rangle \\ &= \bar{a}_{ji}\,. \end{aligned}$$

Αφού ο L είναι ερμιτιανός, $a_{ij} = \langle L(u_j),\, u_i \rangle = \langle u_j,\, L(u_i) \rangle = \bar{a}_{ji}$ και ο πίνακας A είναι ίσος με τον συζυγή του.

□

Πρόταση 5.10 *Θεωρούμε μιγαδικό διανυσματικό χώρο V και τελεστή $L : V \to V$. Εάν ο L είναι ερμιτιανός, τότε οι ιδιοτιμές του L είναι πραγματικοί αριθμοί.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ μία ιδιοτιμή του L, και $v \in V$ ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ, $L(v) = \lambda v$. Τότε

$$\langle L(v),\, v \rangle = \langle \lambda v,\, v \rangle = \lambda \langle v,\, v \rangle\,,$$

και

$$\langle v,\, L(v) \rangle = \langle v,\, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v,\, v \rangle\,.$$

Αφού $\langle v,\, v \rangle \neq 0$ και ο L είναι ερμιτιανός, $\lambda = \bar{\lambda}$. Άρα η ιδιοτιμή λ είναι πραγματικός αριθμός.

□

Λήμμα 5.11 *Εάν $L : V \to V$ είναι ερμιτιανός τελεστής, τότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ιδιοτιμές λ και μ του L και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u και v. Τότε

$$\lambda \langle u,\, v \rangle = \langle L(u),\, v \rangle = \langle u,\, L(v) \rangle = \bar{\mu} \langle u,\, v \rangle\,.$$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, $\lambda \langle u,\, v \rangle = \mu \langle u,\, v \rangle$, και εάν $\lambda \neq \mu$, $\langle u,\, v \rangle = 0$.

□

5.8 Μοναδιαίοι τελεστές

Ορισμός 5.11. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο και ένα γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Ο τελεστής L ονομάζεται **μοναδιαίος** (ή **ορθομοναδιαίος**) εάν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή εάν για κάθε $u,\, v \in V$,

$$\langle L(u),\, L(v) \rangle = \langle u,\, v \rangle\,.$$

Ένας μοναδιαίος τελεστής σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Παράδειγμα 5.20 Ο τελεστής $L(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ είναι ορθογώνιος. Ο τελεστής $M(z, w) = (e^{\mathrm{i}\theta}z, e^{-\mathrm{i}\theta}w)$ είναι μοναδιαίος. Ελέγξτε οτι διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$ και στο $\mathbb{C}^2$ αντίστοιχα.

Ορισμός 5.12. Ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας A ονομάζεται **μοναδιαίος** εάν $A^*A = \mathbf{I}_n$.
Ένας μοναδιαίος πίνακας του οποίου όλοι οι όροι είναι πραγματικοί αριθμοί ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Παράδειγμα 5.21 Ένας 2×2 πραγματικός πίνακας είναι ορθογώνιος εάν και μόνον εάν είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

για κάποιο θ.

Λήμμα 5.12 *Θεωρούμε μοναδιαίο τελεστή $L : V \to V$ σε χώρο πεπερασμένης διάστασης n, και ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του V. Τότε ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι μοναδιαίος,*

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Εάν $A = [a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$,

$$L(u_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_k\,.$$

Αφού ο L είναι μοναδιαίος και η βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθοκανονική, $\langle L(u_i), L(u_j)\rangle = \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$. Εξ άλλου

$$\begin{aligned}
\langle L(u_i), L(u_j)\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k, \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j} u_\ell \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{\ell j} \langle u_k, u_\ell\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{\ell j} \delta_{k\ell} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj} \\
&= (A^*A)_{ji}\,.
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι $A^*A = \mathbf{I}_n$ και ο πίνακας A είναι μοναδιαίος.

□

Πρόταση 5.13 *Θεωρούμε μιγαδικό διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο, και τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Εάν ο L είναι μοναδιαίος, τότε οι ιδιοτιμές του L είναι μιγαδικοί αριθμοί μέτρου 1.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ μία ιδιοτιμή του L, και $v \in V$ ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ, $L(v) = \lambda v$. Τότε

$$\langle v,\, v\rangle = \langle L(v),\, L(v)\rangle = \langle \lambda v,\, \lambda v\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle v,\, v\rangle\,.$$

Αφού $\langle v,\, v\rangle \neq 0$, $\lambda\bar{\lambda} = 1$.

□

5.9 Τριγωνοποίηση τελεστών σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Στο επόμενο Θεώρημα θα δείξουμε οτι όταν έχουμε χώρο με εσωτερικό γινόμενο, η βάση ως προς την οποία ο πίνακας ενός τελεστή είναι άνω τριγωνικός, μπορεί να επιλεγεί να είναι ορθοκανονική.

Θεώρημα 5.14 (Λήμμα Schur.) *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης, με εσωτερικό γινόμενο πάνω από το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του V ως προς την οποία ο L έχει άνω τριγωνικό πίνακα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα του Θεωρήματος Τριγωνοποίησης, Θεώρημα 3.25. Πρέπει να δείξουμε οτι εάν V είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να επιλέξουμε τη βάση $\mathcal{B}'$ να είναι ορθοκανονική.

Υποθέτουμε οτι $\dim V = n \geq 2$. Ο τελεστής L έχει μία ιδιοτιμή λ_1. Έστω u_1 ένα ιδιοδιάνυσμα με $||u_1|| = 1$. Συμπληρώνουμε σε ορθοκανονική βάση του V, $\mathcal{B} = \{u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n\}$ και θεωρούμε τον πίνακα $A = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$. Η πρώτη στήλη του A είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(u_1) = \lambda_1 u_1$, και συνεπώς ο A έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το V ως ευθύ άθροισμα των $V_1 = \langle u_1\rangle$ και $U = \langle u_2,\, \ldots,\, u_n\rangle$ και τις κανονικές απεικονίσεις $j_2 : U \to V_1 \oplus U$ και $p_2 : V_1 \oplus U \to U$, σελ. 128. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$M = p_2 \circ L \circ j_2 \,:\, U \to U$$

και παρατηρούμε οτι ο πίνακας που παριστάνει την απεικόνιση M ως προς τη βάση $\{u_2, \ldots, u_n\}$ είναι ο D.

Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει βάση $\mathcal{W} = \{w_2, \ldots, w_n\}$, ως προς την οποία ο πίνακας T της απεικόνισης M είναι άνω τριγωνικός. Παρατηρούμε οτι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}' = \{u_1, w_2, \ldots, w_n\}$ έχει τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{1\,2} & \ldots & b_{1\,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

δηλαδή είναι άνω τριγωνικός.

□

Πόρισμα 5.15 *Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο χ_L του τελεστή $L : V \longrightarrow V$ αναλύεται σε παράγοντες πρώτου βαθμού πάνω από το $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο L έχει άνω τριγωνικό πίνακα.*

Απόδειξη. Αφού $\chi_L(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$, οι ιδιοτιμές του L είναι οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, και υπάρχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα $u_1 \in V$, με $||u_1|| = 1$, έστω για την ιδιοτιμή λ_1.

Για να εφαρμόσουμε την επαγωγή όπως στο Θεώρημα 5.14, αρκεί να παρατηρήσουμε οτι $\chi_L(x) = -(x-\lambda_1)\chi_M(x)$, και συνεπώς χ_M επίσης αναλύεται σε παραγόντες πρώτου βαθμού.

□

Παράδειγμα 5.22 θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-2)$, το οποίο είναι γινόμενο παραγόντων πρώτου βαθμού. Θα βρούμε ορθογώνιο πίνακα ο οποίος τριγωνοποιεί τον A. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$, με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1, -1, 1)$, και $\lambda_2 = 2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και ιδιοδιάνυσμα $v_2 = (2, -1, 3)$. Σύμφωνα με την απόδειξη του Λήμματος Schur επιλέγουμε ένα ιδιοδιάνυσμα και βρίσκουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου που παράγεται από αυτό. Εάν επιλέξουμε το v_1, το ορθογώνιο συμπλήρωμα είναι ο χώρος $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle^{\perp} = \langle w_1, w_2 \rangle$, με

$$w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε τον τελεστή $M : W \longrightarrow W$, $M(w) = P \circ L(w)$, όπου P είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^3$ στο W. Για να υπολογίσουμε τα $M(w_1)$, $M(w_2)$, παρατηρούμε οτι $L(w_1) = (0, -2, 1) = v_1 - w_2$ και $L(w_2) = (2, 2, 3) = v_1 + 2w_1 + 3w_2$, άρα $M(w_1) = -w_2$ και $M(w_2) = 2w_1 + 3w_2$. Δηλαδή ο πίνακας του M ως προς τη βάση $\{w_1, w_2\}$ είναι ο $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Ο C έχει ιδιοτιμές $\mu_1 = 2$ με ιδιοδιάνυσμα $(1, 1)$, και $\mu_2 = 1$ με ιδιοδιάνυσμα $(2, 1)$. Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή M έχουν διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση $\{w_1, w_2\}$ τα $(1, 1)$ και $(2, 1)$. Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα συντεταγμένων $(1, 1)$ βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του τελεστή M είναι το $w' = w_1 + w_2 = (0, 1, 1)$. Αυτό επιλέγουμε ως δεύτερο διάνυσμα της ορθογώνιας βάσης. Ως τρίτο διάνυσμα μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα ορθογώνιο στα v_1 και w'. Άρα έχουμε τη βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

και τον ορθογώνιο πίνακα

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

για τον οποίο $Q^T A Q$ είναι άνω τριγωνικός.

5.10 Διαγωνιοποίηση ερμιτιανών τελεστών.

Θεώρημα 5.16 (Φασματικό Θεώρημα) *Κάθε ερμιτιανός τελεστής σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο έχει μία βάση από ορθογώνια ιδιοδιανύσματα. Ο πίνακας του τελεστή ως προς αυτή τη βάση είναι διαγώνιος, με τις (πραγματικές) ιδιοτιμές στη διαγώνιο.*

Απόδειξη. Αφού ο τελεστής L είναι ερμιτιανός, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί, και συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι γινόμενο παραγόντων πρώτου βαθμού και στην περίπτωση που το σώμα είναι οι πραγματικοί αριθμοί.

Από το Λήμμα του Schur, υπάρχει ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο πίνακας A του L είναι άνω τριγωνικός. Τότε ο πίνακας A^* είναι κάτω τριγωνικός. Αλλά αφού ο L είναι ερμιτιανός, $A^* = A$, και συνεπώς ο πίνακας A είναι διαγώνιος. Τότε τα διαγώνια στοιχεία είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή, ενώ η βάση αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του τελεστή.

□

Παράδειγμα 5.23 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix}$. Ελέγξτε οτι ο A είναι ερμιτιανός, $A^* = A$. Οι ιδιοτιμές του A είναι 0 και 6, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(2+\mathrm{i}, -1)$

και $(2+\mathrm{i},\,5)$. Διαιρούμε με τις νόρμες $\|(2+\mathrm{i},\,1)\| = \sqrt{6}$ και $\|(2+\mathrm{i},\,5)\| = \sqrt{30}$ και έχουμε τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2+\mathrm{i},\,-1)$ και $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2+\mathrm{i},\,5)$. Ο μοναδιαίος πίνακας

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2+\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{2+\mathrm{i}}{\sqrt{30}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

διαγωνιοποιεί τον A,

$$U^*AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 5.17 *Για κάθε ερμιτιανό πίνακα $A \in \mathcal{M}(n,\,\mathbb{C})$ υπάρχει μοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε $\Lambda = U^*AU$ είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας.*
Για κάθε συμμετρικό πίνακα $A \in \mathcal{M}(n,\,\mathbb{R})$ υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q τέτοιος ώστε $\Lambda = Q^TAQ$ είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας.

Θεώρημα 5.18 (Θεώρημα Φασματικής Ανάλυσης.) *Κάθε ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathcal{M}(n,\,\mathbb{C})$ με k διαφορετικές ιδιοτιμές εκφράζεται ως άθροισμα*

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k\,,$$

όπου λ_i, για $i = 1,\,\ldots,\,k$, είναι οι ιδιοτιμές και P_i είναι ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής λ_i.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε οτι ένας τρόπος να περιγράψουμε το γινόμενο δύο πινάκων, AB είναι ως άθροισμα πινάκων που προκύπτουν από το γινόμενο της i-στήλης του A με την i-γραμμή του B. Συγκεκριμένα,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i1} & \ldots & b_{ik} \end{bmatrix}.$$

Αναλύουμε με αυτό τον τρόπο το γινόμενο $A = U(\Lambda U^*)$.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\bar{u}_{11} & \ldots & \lambda_1\bar{u}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n\bar{u}_{1n} & \ldots & \lambda_n\bar{u}_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \ldots & \bar{u}_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{bmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1n} & \ldots & \bar{u}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε οτι

$$\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1i} & \ldots & \bar{u}_{ni} \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στον υπόχωρο που παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $(u_{1i}, \ldots, u_{ni})$.

Εάν η ιδιοτιμή λ_j έχει πολλαπλότητα k και ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $w_1, \ldots, w_k$, τότε ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στον ιδιόχωρο της λ_j είναι το άθροισμα των ορθογωνίων προβολών σε κάθε ένα από τα $w_1, \ldots, w_k$,

$$P_j = w_1 w_1^* + \cdots + w_k w_k^* .$$

□

Παράδειγμα 5.24 Θεωρούμε τον πίνακα A του Παραδείγματος 5.23. Ο A έχει ιδιοτιμές 0 και 6, με αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2+\mathrm{i}, -1)$ και $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2+\mathrm{i}, 5)$. Οι πίνακες προβολής στους ιδιόχωρους είναι $u_1u_1^*$ και $u_2u_2^*$. Η φασματική ανάλυση του πίνακα A είναι

$$A = 0u_1u_1^* + 6u_2u_2^* = 6 \begin{bmatrix} \frac{2+\mathrm{i}}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2-\mathrm{i}}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} .$$