

Γραμμική Άλγεβρα II
Διάλεξη 16
Τριγωνικοί πίνακες, Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο.

Χρήστος Κουρουνώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

5/5/2014

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο τελεστή

Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και L είναι ένας γραμμικός τελεστής στον V , θεωρούμε πίνακες A και B που αντιστοιχούν στον L ως προς διαφορετικές βάσεις του V .

Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, και συνεπώς $\det A = \det B$.

Οι πίνακες πολυωνύμων $A - \lambda \mathbf{I}_n$ και $B - \lambda \mathbf{I}_n$ είναι επίσης όμοιοι, και συνεπώς τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των δύο πινάκων είναι ίσα

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = \det(B - \lambda \mathbf{I}_n).$$

Μπορούμε να ορίσουμε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** $\chi_L(\lambda)$ του τελεστή L , να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα του L ως προς οποιαδήποτε βάση του V .

Διαγώνιος πίνακας

Πρόταση

Εάν $L : V \rightarrow V$ είναι γραμμικός τελεστής, και ο διανυσματικός χώρος V έχει μία πεπερασμένη βάση από ιδιοδιανύσματα του L , τότε ο πίνακας του L ως προς αυτήν τη βάση είναι διαγώνιος, με τις ιδιοτιμές του τελεστή στη διαγώνιο.

Αλγεβρική και Γεωμετρική Πολλαπλότητα

Αλγεβρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, ενώ **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής είναι η διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή.

Πρόταση

Η γεωμετρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι μικρότερη ή ίση προς την αλγεβρική πολλαπλότητα.

Τριγωνικός πίνακας

Πρόταση

Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \rightarrow V$, και βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ του V . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1 Ο πίνακας A της L ως προς τη βάση \mathcal{B} είναι άνω τριγωνικός
- 2 $L(v_j) \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$ για $j = 1, \dots, n$.
- 3 Για κάθε $j = 1, \dots, n$ ο υπόχωρος $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$ είναι αναλλοίωτος από τον L .

Τριγωνικός πίνακας (2)

Πρόταση

Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $L : V \rightarrow V$ έχει άνω τριγωνικό πίνακα ως προς κάποια πεπερασμένη βάση του διανυσματικού χώρου V . Τότε οι ιδιοτιμές του L είναι ακριβώς τα στοιχεία της διαγωνίου αυτού του πίνακα.

Θεώρημα

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης πάνω από το \mathbb{C} , και γραμμικό τελεστή $L : V \rightarrow V$. Τότε υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο L έχει άνω τριγωνικό πίνακα.

Θεώρημα Cayley – Hamilton

Θεώρημα (Cayley – Hamilton)

Εάν $\chi_L(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή L , σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V , τότε ο τελεστής

$$\chi_L(L) = b_n L^n + \dots + b_1 L + b_0 I_V$$

είναι ο μηδενικός τελεστής.

Πόρισμα

Εάν A είναι τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας και $\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , τότε ο πίνακας $\chi_A(A)$ είναι ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας.