

5.3 Ισοδύναμες Νόρμες

Ορισμός 5.3. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ στον V λέγονται **ισοδύναμες** αν υπάρχουν θετικές σταθερές m και M τέτοιες ώστε, για κάθε $x \in V$,

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει άμεσα ότι για κάθε $x \in V$,

$$\frac{1}{M}\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|'.$$

Παράδειγμα 5.12 Οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ του \mathbb{R}^n είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Πράγματι για $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \max_i |x_i| \sum_{i=1}^n 1 = n\|x\|_\infty$$

Έστω k ο δείκτης για τον οποίο $|x_k| = \|x\|_\infty$, τότε έχουμε

$$\|x\|_\infty = |x_k| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε σύμφωνα με τον ορισμό για $m = 1, M = n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Λήμμα 5.5 Κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον \mathbb{R}^n είναι ισοδύναμη με τη νόρμα μεγίστου $\|\cdot\|_\infty$ του \mathbb{R}^n .

Απόδειξη.

□

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω Λήμμα μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο πιο γενικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 5.6 Όλες οι νόρμες στον \mathbb{R}^n είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Γενικότερα μπορεί να δείξει κανείς ότι σε χώρους πεπερασμένης διάστασης όλες οι νόρμες πάνω στο χώρο είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Σε αυτή την περίπτωση οι αντίστοιχες σταθερές m, M του ορισμού, μπορεί να εξαρτώνται από τη διάσταση του χώρου.

5.4 Νόρμες Πινάκων

Εισάγουμε τώρα τις νόρμες πινάκων. Στον γραμμικό χώρο $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ των πινάκων μπορούμε να ορίσουμε διάφορες νόρμες. Όμως, θεωρούμε τους πίνακες ως απεικονίσεις από τον \mathbb{R}^n στον \mathbb{R}^n και ορίζουμε τις νόρμες πινάκων με συγκεκριμένο τρόπο.

Ορισμός 5.4. Μια απεικόνιση $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \|A\|$ λέγεται **νόρμα πινάκων** (ή **στάθμη πινάκων**) εαν

ΝΠ 1. $\|A\| = 0$ εάν και μόνον εάν $A = 0$

ΝΠ 2. Για κάθε $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ και $a \in \mathbb{R}$, $\|av\| = |a| \|v\|$

ΝΠ 3. Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (τριγωνική ανισότητα)

ΝΠ 4. Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Παρατηρούμε ότι οι τρεις πρώτες ιδιότητες της νόρμας πίνακα ταυτίζονται με τις αντίστοιχες της νόρμας διανύσματος.

Παράδειγμα 5.13 Ένα παράδειγμα νόρμας πίνακα είναι η νόρμα Frobenius :

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε σε μια συγκεκριμένη κατηγορία νορμών πινάκων, τις λεγόμενες **φυσικές νόρμες** ή **νόρμες τελεστών**.

Ορισμός 5.5. Έστω $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \|u\|_v$ μια νόρμα διανυσμάτων. Η απεικόνιση $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \|A\|_m$

$$\|A\|_m = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \quad (5.9)$$

λέγεται **φυσική νόρμα πίνακα** παραγόμενη από την νόρμα $\|\cdot\|_v$ του \mathbb{R}^n .

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι μια **φυσική νόρμα πίνακα** είναι μια νόρμα πινάκων. Πράγματι μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η 5.9 ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του ορισμού 5.4. Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 &\iff \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}^n Ax = 0 \iff A = 0 \\ \|\lambda A\| &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \|A\| \\ \|A + B\| &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\| \\ \|AB\| &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|A\| \|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από την

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, η οποία είναι άμεση συνέπεια του ορισμού 5.9.

5.4.1 Παραδείγματα φυσικών νορμών πινάκων

1. Στον \mathbb{R}^n θεωρούμε την νόρμα μεγίστου $\|\cdot\|_\infty$. Η αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα που παράγεται ονομάζεται *νόρμα αθροίσματος γραμμών* και δίνεται από

$$A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (5.10)$$

2. Στον \mathbb{R}^n θεωρούμε την νόρμα $\|\cdot\|_1$. Η αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα που παράγεται ονομάζεται *νόρμα αθροίσματος στηλών* και δίνεται από

$$A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (5.11)$$

3. Στον \mathbb{R}^n θεωρούμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$. Η αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα που παράγεται δίνεται από

$$A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \quad \|A\|_2 = (\rho(A^T A))^{1/2} \quad (5.12)$$

όπου $\rho(A)$ είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα A και ορίζεται ως το μέγιστο των απολύτων τιμών των ιδιοτιμών του πίνακα A .

Παράδειγμα 5.14 Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

έχουμε ότι $\|A\|_\infty = 9$, $\|A\|_1 = 7$, $\|A\|_2 = 6,3543$, $\|A\|_F = 6,5574$

Τέλος να αναφέρουμε ότι η νόρμα Frobenius που ορίσαμε παραπάνω δεν είναι φυσική νόρμα.

5.5 Δείκτης κατάστασης πίνακα

Έστω $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και θεωρούμε τη λύση του γραμμικού συστήματος

$$Ax = b. \quad (5.14)$$

Έστω ότι στα στοιχεία του b εισάγεται κάποια διαταραχή Δb . Αυτό έχει ως συνέπεια να διαταράξει την λύση του 5.14 σε $x + \Delta x$,

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b. \quad (5.15)$$

Ερώτημα : Μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος της σχετικής μεταβολής $\|\Delta x\|/\|x\|$ της λύσης του συστήματος λόγω της μεταβολής του δεξιού μέλους;

Με την χρήση των νορμών μπορούμε να απαντήσουμε θετικά στο παραπάνω ερώτημα. Ας δούμε πως ! Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις 5.14 και 5.15 παίρνουμε

$$A \Delta x = \Delta b \Rightarrow \Delta x = A^{-1} \Delta b \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\| \quad (5.16)$$

για κάποια νόρμα $\|\cdot\|$ στον \mathbb{R}^n και την παραγόμενη φυσική νόρμα πίνακα. Υποθέτοντας ότι $b \neq 0$, άρα και $x \neq 0$, από την 5.14 έχουμε ότι

$$\|b\| \leq \|A\| \|x\| \quad (5.17)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 5.16, 5.17 παίρνουμε την εκτίμηση

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (5.18)$$

Δοσμένου ότι για κάθε πίνακα A και νόρμα $\|\cdot\|$ μπορούμε να βρούμε b και Δb έτσι ώστε η 5.18 να ισχύει ως ισότητα καταλήγουμε ότι ο αριθμός

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (5.19)$$

είναι ένας συντελεστής 'ευαισθησίας-μεγένθυση' που εκφράζει τη μέγιστη δυνατή μεταβολή της λύσης $\|\Delta x\|/\|x\|$ ως προς την μεταβολή του δεξιού μέλους $\|\Delta b\|/\|b\|$

Ορισμός 5.6. Ο αριθμός $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ ονομάζεται **δείκτης κατάστασης** του πίνακα A .

Παρατηρούμε ότι ο $\kappa(A)$ είναι θετικός αριθμός και μάλιστα είναι μεγαλύτερος ή ίσος με την μονάδα,

$$1 = \|I\| = \|A A^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = \kappa(A).$$

Η τιμή του $\kappa(A)$ εξαρτάται από την νόρμα πίνακα που χρησιμοποιούμε. Για το πίνακα στο παράδειγμα 5.13 έχουμε ότι $\kappa_\infty(A) = 63$, $\kappa_1(A) = 45,5$, $\kappa_2(A) = 32,45$, $\kappa_F(A) = 33,76$.

Ας δούμε τώρα με ένα παράδειγμα πώς επηρεάζει ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα τη λύση ενός γραμμικού συστήματος.

Παράδειγμα 5.15 Θεωρούμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 0,913 & 0,659 \\ 0,780 & 0,563 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,254 \\ 0,217 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

το οποίο έχει μοναδική λύση $x = (1, -1)^T$, αν φυσικά κάνουμε τις πράξεις ακριβώς, δηλαδή χρησιμοποιώντας άπειρα δεκαδικά ψηφία. Όμως αν θελούμε να λύσουμε το σύστημα σε ένα υπολογιστή οι πράξεις θα γίνουν με αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας. Ο λόγος είναι ότι ακόμα και οι πιο σύγχρονοι υπολογιστές χρησιμοποιούν πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων για την αναπαράσταση των αριθμών.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να λύσουμε το παραπάνω σύστημα σε ένα υπολογιστή που χρησιμοποιεί 3 δεκαδικά ψηφία για αναπαράσταση των αριθμών. Τότε η απαλοιφή Gauss σε αυτόν τον υπολογιστή θα δώσει

$$\begin{bmatrix} 0,913 & 0,659 \\ 0 & 0,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,254 \\ 0,001 \end{bmatrix}$$

και η ανάδρομη αντικατάσταση θα δώσει την λύση $\tilde{x} = (1, -0,443)!!!$ Ο λόγος αποτυχίας θα πεί κανείς είναι η αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας των τριών δεκαδικών ψηφίων του συγκεκριμένου υπολογιστή. Αυτό είναι εν μέρει σωστό και αν χρησιμοποιήσουμε έναν υπολογιστή με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων θα πάρουμε την ακριβή λύση του συστήματος $x = (1, -1)^T$.

Ας εξετάσουμε όμως λίγο πιο προσεκτικά το σύστημα αυτό. Ας κρατήσουμε τον πίνακα του συστήματος σταθερό και ας μεταβάλλουμε το δεξί μέλος ελάχιστα, και ας θεωρήσουμε το εξής διαταραγμένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} 0,913 & 0,659 \\ 0,780 & 0,563 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,253 \\ 0,218 \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Παρατηρήστε ότι η διαταραχή του δεξιού μέλους του 5.21 σε σχέση με το αντίστοιχο του 5.20 είναι $\Delta b = (-0,001, 0,001)$. Η ακριβής λύση του 5.21 είναι $y = (1223, -1694)^T !!!$ Μια μικρή μεταβολή του δεξιού μέλους προκάλεσε μια *μεγάλη* μεταβολή στη λύση x . Η εκτίμηση 5.18 και μερικοί απλοί υπολογισμοί θα μας βοηθήσουν να καταλάβουμε γιατί συνέβη αυτό.

Θεωρούμε την νόρμα $\|\cdot\|_1$ στον \mathbb{R}^n και την παραγόμενη νόρμα πίνακα 5.11. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \|\Delta x\|_1 = \|y - x\|_1 &= |1223 - 1| + |-1694 + 1| = 2915, \quad \|x\|_1 = 2 \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \sim 1,5 \times 10^3 \\ \|\Delta b\|_1 &= 2 \times 10^{-3}, \quad \|b\|_1 = 0,471 \Rightarrow \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} \sim 4 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Επίσης

$$\|A\|_1 = \max(1,693, 1,222) = 1,693, \quad \|A^{-1}\|_1 = 10^6 \max(1,572, 1,343) = 1,572 \times 10^6$$

Άρα ο δείκτης κατάστασης του πίνακα είναι $\kappa_1(A) = 2,66 \times 10^6 !!!$ Από την εκτίμηση 5.18 βλέπουμε αμέσως πως μια μικρή μεταβολή της τάξεως 10^{-3} στο δεξί μέλος του συστήματος πολλαπλασιάστηκε από το δείκτη κατάστασης του πίνακα, τάξεως 10^6 , για να δώσει μια μεγένθυση τάξεως 10^3 στη λύση.

Από τον ορισμό του δείκτη κατάστασης $\kappa(A)$ βλέπουμε ότι αυτός ορίζεται για αντιστρέψιμους πίνακες. Μπορεί ναδειχθεί ότι ο λόγος $1/\kappa(A)$ αποτελεί ένα μέτρο για την απόσταση του A από το σύνολο των μη-αντιστρέψιμων πινάκων. Ειδικότερα μπορούμε να δείξουμε την παρακάτω εκτίμηση

$$\frac{1}{\kappa(A)} \leq \inf \left\{ \frac{\|A - B\|}{\|A\|}, \quad B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \text{ μη-αντιστρέψιμος} \right\}$$

Άρα όταν $\kappa(A) \rightarrow \infty$ ο πίνακας A τείνει να γίνει μη-αντιστρέψιμος. Για συγκεκριμένες νόρμες πινάκων η προηγούμενη ανισότητα ισχύει και ως ισότητα.

Παρατηρήσεις

1. Για τον υπολογισμό του $\kappa(A)$ απαιτείται η γνώση του αντίστροφου A^{-1} του οποίου το κόστος υπολογισμού είναι πολύ υψηλό για μεγάλες τιμές του n . Στη πράξη χρησιμοποιούνται ειδικοί αλγόριθμοι οι οποίοι προσεγγίζουν την $\|A^{-1}\|$. Συναρτήσεις υπολογισμού του $\kappa(A)$ υπάρχουν σε όλα τα σύγχρονα πακέτα-βιβλιοθήκες επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Στη Python η συνάρτηση `numpy.linalg.cond(A, p)` προσεγγίζει τον $\kappa(A)$ με μεγάλη ακρίβεια στη νόρμα πίνακα που προσδιορίζεται από την παράμετρο p .
2. Όπως είδαμε, τόσο η ορίζουσα $\det(A)$ όσο και ο λόγος $1/\kappa(A)$ αποτελούν μέτρα για το εάν ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος ή όχι. Όμως για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος και κατά πόσο αυτό επηρεάζεται από μικρές διαταραχές στα δεδομένα, μεγάλη σημασία έχει ο δείκτης κατάστασης του πίνακα και όχι η ορίζουσα του. Αναφέρουμε το εξής χαρακτηριστικό παράδειγμα: Θεωρήστε την λύση ενός γραμμικού συστήματος ο πίνακας του οποίου είναι διαγώνιος και όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με $1/2$. Τότε $\det(A) = 1/2^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ άρα για μεγάλες τιμές του n ο πίνακας τείνει να γίνει μη-αντιστρέψιμος. Από την άλλη μεριά όμως $\kappa(A) = 1, \forall n$ και σε οποιάδήποτε νόρμα. Άρα ο πίνακας είναι ιδανικός για να λύνουμε γραμμικά συστήματα με την έννοια ότι τυχόν μικρές διαταραχές στα δεδομένα ή στις πράξεις δεν θα επιρεάσουν την λύση.
3. Σε πολλές εφαρμογές καταλήγουμε να λύσουμε ένα πολύ μεγάλο γραμμικό σύστημα $Ax = b$, και η χρήση της απαλοιφής Gauss είναι συνήθως ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται. Λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας του υπολογιστή εισάγονται σφάλματα-διαταραχές τόσο στη αναπαράσταση των στοιχείων του συστήματος όσο και κατά την εκτέλεση των πράξεων. Η τελική λύση \tilde{x} που δίνει ο υπολογιστής είναι μια προσέγγιση της ακριβούς λύσης x . Το σχετικό σφάλμα της προσέγγισης αυτής μπορεί να εκτιμηθεί και δίνεται από

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{2 u \kappa_\infty(A)}{1 - u \kappa_\infty(A)}$$

όπου u είναι το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης με $u \sim 10^{-7}$ για απλή ακρίβεια και $u \sim 10^{-15}$ για διπλή ακρίβεια. Από την παραπάνω εκτίμηση περιμένουμε ότι αν $u \kappa_\infty(A) \sim 1$, δηλαδή αν $\kappa_\infty(A) \gg 1$, τότε το σχετικό σφάλμα στη λύση θα είναι πολύ μεγάλο. (Δείτε το προηγούμενο παράδειγμα με τον 2×2 πίνακα).