Κεφάλαιο 2

Ορίζουσες

2.1 Χαρακτηριστικές ιδιότητες της Ορίζουσας

Γνωρίζουμε την ορίζουσα πινάκων 2×2 : εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2.$$

Για ένα γενικό 2×2 πίνακα, η ορίζουσα είναι :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Εύκολα ελέγχουμε ορισμένες ιδιότητες των οριζουσών 2×2 πινάκων.

(α΄) Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι 1,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(β΄) Το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει όταν εναλλάσσουμε τις γραμμές του πίνακα:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} &= cb - da \\ &= -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(γ΄) Η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή του πίνακα :

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = (a+a')d - (b+b')c$$

$$
\begin{aligned}
&= (ad-bc)+(a'd-b'c) \\
&= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} &= tad - tbc \\
&= t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Από τα (β′) και (γ′) συμπεραίνουμε οτι η ορίζουσα επίσης εξαρτάται γραμμικά από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} c+c' & d+d' \\ a & b \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c' & d' \\ a & b \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Για να επεκτείνουμε την έννοια της ορίζουσας σε $n \times n$ πίνακες, θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις ιδιότητες. Θα δείξουμε οτι αυτές οι τρεις ιδιότητες χαρακτηρίζουν με μοναδικό τρόπο την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα.

Ορισμός 2.1. **Ορίζουσα** ονομάζεται μία συνάρτηση στο σύνολο $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ των $n \times n$ πινάκων με συνιστώσες πραγματικούς αριθμούς,

$$\det : \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} ,$$

η οποία συμβολίζεται $\det A$ ή $|A|$, και ικανοποιεί τις ιδιότητες :

(α′) *Η ορίζουσα του $n \times n$ ταυτοτικού πίνακα είναι 1,*

$$\det \mathbf{I}_n = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(β′) *Εάν ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε*

$$\det B = - \det A .$$

(γ′) *Η $\det$ εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή του πίνακα:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & \dots & a_{1n} + a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

και

$$\begin{vmatrix} ta_{11} & \dots & ta_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Προσέξτε οτι δεν ισχύουν οι ισότητες $\det(A + B) = \det A + \det B$ και $\det(tA) = t \det A$, παρά μόνον όταν $n = 1$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (β′) και (γ′), βλέπουμε οτι η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από οποιαδήποτε γραμμή του πίνακα.

Δραστηριότητα 2.1 Τι σημαίνει ‘‘η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από τη δεύτερη γραμμή’’ για τον ακόλουθο πίνακα;

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d + l & 2e + m & 2f + n \\ g & h & k \end{bmatrix} .$$

Δραστηριότητα 2.2 Δίδεται ο 3×3 πίνακας A, με $\det A = 5$. Βρείτε την ορίζουσα $\det(2A)$.

Από αυτές τις τρεις ιδιότητες θα συμπεράνουμε διάφορες άλλες ιδιότητες των οριζουσών, που ϑα μας επιτρέψουν να δείξουμε οτι υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες.

(δ′) *Εάν δύο γραμμές του πίνακα* A *είναι ίσες, τότε* $\det A = 0$.

Πράγματι εάν εναλλάξουμε τις δύο ίσες γραμμές, ο πίνακας δεν αλλάζει, αλλά από το (β′), η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Άρα $\det A = -\det A$ και συνεπώς $\det A = 0$.

(ε′) *Οταν αφαιρούμε πολλαπλάσιο μίας γραμμής από μία άλλη, η ορίζουσα του πίνακα δεν αλλάζει.*

> **Δραστηριότητα 2.3** Ελέγξατε το (ε′) στον πίνακα
>
> $$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε τον πίνακα B, του οποίου οι γραμμές είναι ίσες με αυτές του πίνακα A, εκτός απο τη γραμμή i, από την οποία έχουμε αφαιρέσει τη γραμμή j πολλαπλασιασμένη επί λ, για $j \neq i$. Θεωρούμε και τον πίνακα C, του οποίου οι γραμμές είναι ίσες με αυτές του πίνακα A, εκτός απο τη γραμμή i, η οποία είναι ίση με τη γραμμή j του πίνακα A. Τότε, από το (γ′), $\det B = \det A - \lambda \det C$. Αλλά από το (δ′), $\det C = 0$. Συνεπώς $\det B = \det A$.

> **Δραστηριότητα 2.4** Διατυπώστε το (ε′) με το συμβολισμό (a_{ij}). Συγκεκριμένα, γράψτε τις συνιστώσες b_{kl} της k-γραμμής του B, και c_{kl} της k-γραμμής του C, για $k = i$ και για $k \neq i$.

Λήμμα 2.1 *Εάν ο πίνακας* B *προκύπτει από τον πίνακα* A *μέσω διαδικασίας απαλοιφής Gauss στην οποία περιλαμβάνονται* k *εναλλαγές γραμμών, τότε* $\det B = (-1)^k \det A$.

Πράγματι, από το (ε′) η αφαίρεση πολλαπλασίου μίας γραμμής από μία άλλη δεν αλλάζει την ορίζουσα. Από το (β′) κάθε εναλλαγή δύο γραμμών πολλαπλασιάζει την ορίζουσα με -1.

(ϛ′) *Εάν ο πίνακας* A *έχει μία μηδενική γραμμή, τότε* $\det A = 0$, όπως αποδεικνύεται εύκολα από τα (δ′) και (ε′).

> **Δραστηριότητα 2.5** Δείξτε οτι εάν μία γραμμή του πίνακα A είναι πολλαπλάσιο μίας άλλης γραμμής, τότε $\det A = 0$.

(ζ′) *Εάν* D *είναι διαγώνιος πίνακας*

$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix},$$

τότε $\det D = d_1 \, d_2 \ldots d_n$.

Πράγματι,

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{vmatrix}$$

$$= \cdots$$

$$= d_1\, d_2 \ldots d_n \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

(η΄) *Εάν ο A είναι τριγωνικός, τότε η ορίζουσα είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.*

Εάν a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} είναι τα στοιχεία της διαγωνίου, και $a_{11}\, a_{22}\, \ldots\, a_{nn} \neq 0$, τότε αφαιρώντας πολλαπλάσια μίας γραμμής απο μία άλλη, μπορούμε να φέρουμε τον πίνακα σε διαγώνια μορφή με τα a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} στη διαγώνιο. Αν ο A είναι κάτω τριγωνικός, αρχίζουμε με την πρώτη γραμμή, για να μηδενίσουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης κάτω από το a_{11}. Αν ο A είναι άνω τριγωνικός, αρχίζουμε με την τελευταία γραμμή, για να μηδενίσουμε τα στοιχεία της τελευταίας στήλης πάνω από το a_{nn}. Άρα $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Εάν κάποιο απο τα $a_{i\,i}$ είναι μηδέν, τότε η απαλοιφή Gauss δίδει ένα πίνακα με μία μηδενική γραμμή. Άρα πάλι $\det A = 0$.

2.2 Πίνακες Μετάθεσης

Μία μετάθεση n στοιχείων είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση σ από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ στον εαυτό του. Για τις μεταθέσεις μικρών συνόλων χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Έτσι, $\binom{1\,2\,3\,4}{4\,2\,1\,3}$ συμβολίζει τη μετάθεση που απεικονίζει το 1 στο 4, το 2 στο 2, το 3 στο 1 και το 4 στο 3. Ένας άλλος εύχρηστος τρόπος να συμβολίζουμε μεταθέσεις είναι με πίνακες. Η μετάθεση $\binom{1\,2\,3\,4}{4\,2\,1\,3}$ αντιστοιχεί στον πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ αφού } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 2.2. Ένας $n \times n$ **πίνακας μετάθεσης** είναι ένας $n \times n$ πίνακας του οποίου οι γραμμές είναι ακριβώς οι γραμμές του ταυτοτικού πίνακα $\mathbf{I}_n$, τοποθετημένες σε μία οποιαδήποτε διάταξη.

Παράδειγμα 2.1 Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι οι 6 πίνακες μετάθεσης 3 στοιχείων, που προκύπτουν από όλες τις διαφορετικές διατάξεις των 3 γραμμών του πίνακα $\mathbf{I}_3$.

Υπενθυμίζουμε οτι ένας $n \times n$ **πίνακας εναλλαγής** $P_{i\,j}$, για $i \neq j$, είναι ο πίνακας που έχει όλες τις γραμμές ίσες με τις γραμμές του ταυτοτικού πίνακα $\mathbf{I}_n$, εκτός από τις γραμμές i και j που έχουν εναλλαγεί. Οι συνιστώσες του πίνακα $P_{i\,j}$ είναι $p_{i\,i} = p_{j\,j} = 0$, $p_{i\,j} = p_{j\,i} = 1$ και $pk\,\ell = \delta_{k\,\ell}$ όταν $k \neq i,\ j$ και $\ell \neq i,\ j$.

Λήμμα 2.2 *Ένας $n \times n$ πίνακας P είναι πίνακας μετάθεσης εάν και μόνον εάν είναι γινόμενο πινάκων εναλλαγής.*

Απόδειξη. Ο πολλαπλασιαμός ενός πίνακα A με έναν πίνακα εναλλαγής $P_{i\,j}$ από τα αριστερά εναλλάσσει τις γραμμές i και j του A. Συνεπώς ο πολλαπλασιασμός του $\mathbf{I}_n$ από τα αριστερά με πίνακες εναλλαγής, οδηγεί σε μία αναδιάταξη των γραμμών του ταυτοτικού πίνακα.

Αντίστροφα, θέλουμε να δείξουμε οτι ένας πίνακας μετάθεσης P είναι γινόμενο πινάκων εναλλαγής. Θεωρούμε την πρώτη στήλη του πίνακα P στην οποία η συνιστώσα στη διαγώνιο δεν είναι 1. Δηλαδή τη στήλη j για την οποία $p_{j\,j} = 0$ και $p_{i\,i} = 1$ για $1 \leq i < j$. Υποθέτουμε οτι η μη μηδενική συνιστώσα στη στήλη j βρίσκεται στη θέση $(i_j,\ j)$. Πολλαπλασιάζουμε τον P από τα αριστερά με τον πίνακα εναλλαγής $P_{i_j\,j}$. Στο γινόμενο $P_{i_j\,j}P$ η συνιστώσα στη θέση $(j,\ j)$ είναι 1.

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε σε έναν πίνακα με όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο ίσα με 1, δηλαδή στον ταυτοτικό πίνακα. Έχουμε $\mathbf{I}_n = P_{i_{j'}\,j'} \cdots P_{i_j\,j}P$, συνεπώς

$$P = P_{i_j\,j} \cdots P_{i_{j'}\,j'}\,.$$

□

Η παράσταση του πίνακα μετάθεσης ως γινόμενο πινάκων εναλλαγής δεν είναι μοναδική, για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Όμως θα δείξουμε οτι εάν ένας πίνακας μετάθεσης είναι γινόμενο περιττού πλήθους πινάκων εναλλαγής, τότε δεν είναι γινόμενο άρτιου πλήθους πινάκων εναλλαγής.

Λήμμα 2.3 *Εάν ο πίνακας μετάθεσης P είναι το γινόμενο k πινάκων εναλλαγής, τότε ο αριθμός $(-1)^k$ εξαρτάται μόνον από τον πίνακα P, και όχι από τη συγκεκριμένη παράσταση ως γινόμενο πινάκων εναλλαγής.*
Στο σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων μετάθεσης, είναι καλά ορισμένη η συνάρτηση

$$\operatorname{sign}(P) = (-1)^k .$$

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν $n \times n$ πίνακα μετάθεσης P. Για κάθε $j = 2, \ldots, n$ ορίζουμε τον αριθμό N_j να είναι το πλήθος των μη μηδενικών συνιστωσών του P που βρίσκονται κάτω και αριστερά από τη μη μηδενική συνιστώσα στη στήλη j, δηλαδή $N_j = \operatorname{card}\{\ell \in \mathbb{N} : 1 \leq \ell < j \text{ και } i_\ell > i_j\}$. Θέτουμε $N_P = \sum_{j=2}^{n} N_j$. Παρατηρούμε οτι για τον ταυτοτικό πίνακα $N_{\mathbf{I}_n} = 0$.

Για παράδειγμα, εάν $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $i_1 = 3$, $i_2 = 2$, $i_3 = 1$. Συνεπώς $N_2 = 1, N_3 = 2$ και $N_P = 3$.

Θα δείξουμε οτι κάθε εναλλαγή γραμμών μεταβάλει τον αριθμό N_P κατά έναν περιττό αριθμό, δηλαδή οτι $N_P - N_{P_{ij}P}$ είναι περιττός.

Υποθέτωντας αυτό το αποτέλεσμα, θεωρούμε οτι P είναι γινόμενο k πινάκων εναλλαγής $P = P_{i_k j_k} \cdots P_{i_1 j_1} \mathbf{I}_n$. Θέτουμε $P_\ell = P_{i_\ell j_\ell} \cdots P_{i_1 j_1} \mathbf{I}_n$. Τότε $P_{\ell+1} = P_{i_{\ell+1} j_{\ell+1}} P_\ell$ και $N_{P_{\ell+1}} = N_{P_\ell} + m_{\ell+1}$ για κάποιο περιττό αριθμό $m_{\ell+1}$. Συμπεραίνουμε οτι $N_P = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$. Αφού όλοι οι αριθμοί m_ℓ είναι περιττοί, εάν N_P είναι περιττός, τότε k είναι περιττός, ενώ εάν N_P είναι άρτιος, k είναι άρτιος. Αφού N_P εξαρτάται μόνον από τον πίνακα P, το ίδιο ισχύει για τον αριθμό $(-1)^k$.

Απομένει να δείξουμε οτι για κάθε εναλλαγή γραμμών P_{ij}, $N_P - N_{P_{ij}P}$ είναι περιττός. Πρώτα θεωρούμε μία εναλλαγή δύο διαδοχικών γραμμών, $P_{i\,i+1}$. Εάν η μη μηδενική συνιστώσα της γραμμής $i+1$ βρίσκεται στα αριστερά της μη μηδενικής συνιστώσας της γραμμής i, τότε $N_{P_{i\,i+1}P} = N_P - 1$. Ενώ εάν η μη μηδενική συνιστώσα της γραμμής $i+1$ βρίσκεται στα δεξιά της μη μηδενικής συνιστώσας της γραμμής i, τότε $N_{P_{i\,i+1}\,P} = N_P + 1$. Για παράδειγμα,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$N_Q = 2 \qquad N_{Q'} = 3 \qquad N_{Q''} = 1\,.$$

Τώρα θεωρούμε μία γενική εναλλαγή $P_{i\,j}$ και υποθέτουμε οτι $j = i + \ell$. Κάνοντας ℓ εναλλαγές σε διαδοχικές γραμμές, $P_{i\,i+1}$, $P_{i+1\,i+2}$, $\ldots$, $P_{i+\ell-1\,i+\ell}$ φέρνουμε τη γραμμή i του πίνακα P στη θέση $i+\ell$, ενώ διατηρούμε τη διάταξη των υπολοίπων γραμμών. Στη συνέχεια κάνουμε τις $\ell - 1$ εναλλαγές σε διαδοχικές γραμμές, $P_{i+\ell-2\,i+\ell-1}$, $\ldots$, $P_{i\,i+1}$, που φέρνουν τη γραμμή $i+\ell$ του πίνακα P στη θέση i ενώ διατηρούν τη διάταξη των υπολοίπων γραμμών.

Συνολικά κάναμε $2\ell - 1$ εναλλαγές σε διαδοχικές γραμμές, κάθε μία από τις οποίες προσθέτει ± 1 στον αριθμό N_P. Συμπεραίνουμε οτι η εναλλαγή $P_{i\,j}$ αλλάζει τον αριθμό N_P κατά έναν περιττό αριθμό. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

2.3 Μοναδικότητα της ορίζουσας

Τώρα μπορούμε να δείξουμε οτι υπάρχει μοναδική συνάρτηση στο σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων, η οποία να ικανοποιεί τις ιδιότητες (α′), (β′) και (γ′). Έτσι η ορίζουσα είναι *καλά ορισμένη*.

Θεώρημα 2.4 *Εάν A είναι $n \times n$ πίνακας και $A = PLU$, όπου P είναι πίνακας μετάθεσης, L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο και U είναι άνω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία u_{11}, $\ldots$, u_{nn} στη διαγώνιο, τότε η μοναδική συνάρτηση $\det : \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (α′), (β′) και (γ′) είναι η*

$$\det A = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}\mathrm{sign}P\,.$$

Απόδειξη. Από την ιδιότητα (η′), η ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα U είναι $u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$. Ο πολλαπλασιασμός με τον κάτω τριγωνικό πίνακα L προσθέτει πολλαπλάσια μίας γραμμής του U σε μία άλλη. Από το (ε′), $\det LU = \det U$. Τέλος ο πολλαπλασιασμός με P αντιστοιχεί σε εναλλαγές των γραμμών του LU, και πολλαπλασιάζει την ορίζουσα με $\mathrm{sign}P$. Άρα μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες (α′), (β′) και (γ′) πρέπει να έχει την τιμή $u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}\mathrm{sign}P$ στον πίνακα PLU. Για να είναι αυτή η τιμή καλά ορισμένη ως συνάρτηση του πίνακα A, πρέπει να δείξουμε οτι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη παραγοντοποίηση του A. Δηλαδή οτι εάν $P_1L_1U_1 = P_2L_2U_2$, τότε το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του U_1 και το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του U_2 διαφέρουν μόνον κατά το πρόσημο $\mathrm{sign}P_1\mathrm{sign}P_2$. Αυτό δεν θα το αποδείξουμε γενικά, αλλά θα το δούμε σε ένα παράδειγμα.

Θεωρούμε δύο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A = P_1 L_1 U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

και

$$A = P_2 L_2 U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Για τον πίνακα μετάθεσης P_1 έχουμε $\mathrm{sign}P_1 = 1$, ενώ για τον P_2, $\mathrm{sign}P_2 = -1$. Άρα από την πρώτη παραγοντοποίηση έχουμε $\det A = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{7}{6} = 7$ ενώ από τη δεύτερη $\det A = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-7) = 7$.

□

Δραστηριότητα 2.6 Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss (χωρίς εναλλαγές) στους πίνακες $P_1^T A$ και $P_2^T A$, για να επαληθεύσετε οτι παραγοντοποιούνται ως $L_1 U_1$ και $L_2 U_2$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.5 *Η ορίζουσα $\det A$ είναι μηδέν εάν και μόνον εάν ο πίνακας A είναι ιδιόμορφος.*

Απόδειξη. Εάν ο A είναι ιδιόμορφος, τότε η απαλοιφή οδηγεί σε πίνακα με μία μηδενική γραμμή, άρα $\det A = 0$.

Αντίστροφα, εάν A δεν είναι ιδιόμορφος, η απαλοιφή οδηγεί σε άνω τριγωνικό πίνακα με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο, και $\det A = \pm d_1 \, d_2 \cdots d_n \neq 0$.

□

Θεώρημα 2.6 *Εάν A, B είναι $n \times n$ πίνακες,*

$$\det(AB) = \det A \, \det B.$$

Δραστηριότητα 2.7 Ελέγξτε την ιδιότητα $\det(AB) = \det A \det B$ υπολογίζοντας τις ορίζουσες των πινάκων $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ και AB.

Απόδειξη. Εάν ένας από τους πίνακες A, B είναι ιδιόμορφος, τότε το γινόμενο είναι επίσης ιδιόμορφο και $\det(AB) = 0 = \det A \, \det B$.

Υποθέτουμε οτι B δεν είναι ιδιόμορφος, και για κάθε μη ιδιόμορφο $n \times n$ πίνακα A ορίζουμε

$$d(A) = \frac{\det(AB)}{\det B}\,.$$

Θα δείξουμε οτι $d(A)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (α′), (β′), (γ′), και συνεπώς ορίζει μία συνάρτηση η οποία, εάν επεκταθεί με την τιμή 0 για ιδιόμορφους πίνακες, είναι ίση με την ορίζουσα.

Η ιδιότητα (α′): εάν $A = I$,

$$d(I) = \frac{\det IB}{\det B} = \frac{\det B}{\det B} = 1.$$

Η ιδιότητα (β′): εάν εναλλάξουμε δύο γραμμές του A, εναλλάσσονται οι αντίστοιχες γραμμές του AB. Άρα αλλάζει το πρόσημο του $\det AB$, και συνεπώς το πρόσημο του $d(A)$.

Η ιδιότητα (γ′): θεωρούμε πίνακες $C = (c_{ij})$ και $D = (d_{ij})$ τέτοιους ώστε για $j = 1, \ldots, n$,

$$a_{1j} = sc_{1j} + d_{1j}$$

και για $i > 1$

$$a_{ij} = c_{ij} = d_{ij}.$$

Τότε η πρώτη γραμμή του AB είναι

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\, b_{kj} = s \sum_{k=1}^{n} c_{1k}\, b_{kj} + \sum d_{1k}\, b_{kj}$$

και ισχύει $\det AB = s\, \det CB + \det DB$, και συνεπώς $d(A) = s\, d(C) + d(D)$. Άρα η $d(A)$ εξαρτάται γραμμικά απο την πρώτη γραμμή του A.

□

Δραστηριότητα 2.8 Δίδεται ο $n \times n$ πίνακας A, με $\det A = -3$. Βρείτε την ορίζουσα $\det A^2$.

Θεώρημα 2.7 *Η ορίζουσα του αναστρόφου του πίνακα A είναι ίση με την ορίζουσα του A,*

$$\det(A^T) = \det A\,.$$

Απόδειξη. Ο πίνακας A είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν ο ανάστροφος A^T είναι ιδιόμορφος. Άρα σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\det A = 0 = \det A^T\,.$$

Εάν ο A δεν είναι ιδιόμορφος, τότε υπάρχει πίνακας μετάθεσης P για τον οποίο PA έχει μοναδική παραγοντοποίηση

$$PA = LDU\,, \tag{2.1}$$

με L κάτωτριγωνικό με 1 στη διαγώνιο, D διαγώνιο πίνακα και U άνω τριγωνικό με 1 στη διαγώνιο. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.6 και έχουμε

$$\det P \det A = \det L \det D \det U\,.$$

Αναστρέφοντας την 2.1, έχουμε

$$A^T P^T = U^T D^T L^T ,$$

και συνεπώς

$$\det A^T \det P^T = \det U^T \det D^T \det L^T .$$

Αλλά οι πίνακες L, U, U^T και L^T είναι τριγωνικοί πίνακες με ένα στη διαγώνιο. Άρα οι ορίζουσές τους είναι ίσες με 1. Επίσης, για το διαγώνιο πίνακα D έχουμε $D^T = D$. Άρα το μόνο που μένει να δείξουμε είναι οτι $\det P^T = \det P$. Αλλά ο πίνακας P προκύπτει με εναλλαγές γραμμών από τον ταυτοτικό πίνακα I. Συνεπώς $\det P = \pm 1$. Επίσης, $PP^T = I$, και συνεπώς $\det P \det P^T = 1$. Συμπεραίνουμε οτι $\det P = \det P^T$. Έχουμε δείξει οτι

$$\det A = \det P^T \det L \det D \det U = \det P \det L^T \det D^T \det U^T = \det A^T .$$

$\square$

Το Θεώρημα 2.7 αμέσως διπλασιάζει τον κατάλογο των ιδιοτήτων των οριζουσών: για κάθε ιδιότητα για τις γραμμές ενός πίνακα, ισχύει και η αντίστοιχη ιδιότητα για τις στήλες του πίνακα.

2.4 Ασκήσεις

Άσκηση 2.1 Εάν ένας 4×4 πίνακας A έχει ορίζουσα $\det A = \frac{1}{2}$, βρείτε τις ορίζουσες $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$ και $\det(A^{-1})$.

Άσκηση 2.2 Εάν ένας 3×3 πίνακας B έχει ορίζουσα $\det B = -1$, βρείτε τις ορίζουσες $\det(\frac{1}{2}B)$, $\det(-B)$, $\det(B^2)$ και $\det(B^{-1})$.

Άσκηση 2.3 Χρησιμοποιήστε απαλοιφή για να φέρετε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

σε άνω τριγωνική μορφή και να υπολογίσετε την ορίζουσα τους.
Εναλλάξτε τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή του πίνακα B, και επαναλάβετε τη διαδικασία.

Άσκηση 2.4 Καταμετρήστε τις εναλλαγές γραμμών για να βρείτε τις ορίζουσες

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.5 Για κάθε n, πόσες εναλλαγές γραμμών απαιτούνται για να φέρουν τις γραμμές του πίνακα A στην αντίθετη διάταξη PA;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad PA = \begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα P.

Άσκηση 2.6 Είναι οι ακόλουθες προτάσεις αληθείς ή ψευδείς· Δώστε αιτιολόγηση εάν είναι αληθείς, και αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδείς.

α′. Εάν οι πίνακες A και B είναι ίσοι, εκτός από το στοιχείο στη θέση $(1, 1)$, όπου $b_{11} = 2a_{11}$, τότε $\det B = 2 \det A$.

β′. Η ορίζουσα είναι το γινόμενο των οδηγών.

γ′. Εάν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και B ιδιόμορφος, τότε $A+B$ είναι αντιστρέψιμος.

δ′. Εάν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και B ιδιόμορφος, τότε AB είναι ιδιόμορφος.

ε′. Η ορίζουσα του πίνακα $AB - BA$ είναι μηδέν.

Άσκηση 2.7 Βρείτε τις ορίζουσες των

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Για ποιές τιμές του λ είναι ο πίνακας $A - \lambda I$ ιδιόμορφος;

Άσκηση 2.8 Δείξτε οτι εάν το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του A είναι 0 τότε $\det A = 0$. Εάν το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του A είναι 1, τότε $\det(A - I) = 0$. Δείξτε με ένα παράδειγμα οτι αυτό δεν σημαίνει οτι $\det A = 1$.

Άσκηση 2.9 Υπενθυμίζουμε οτι αντισυμμετρικός ονομάζεται ένας πίνακας K εάν $K^T = -K$, όπως ο

$$K = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

α′. Εάν ο K είναι 3×3, δείξτε οτι $\det(-K) = (-1)^3 \det K$. Συμπεράνετε οτι η ορίζουσα ενός 3×3 αντισυμμετρικού πίνακα είναι 0.

β′. Βρείτε ένα παράδειγμα αντισυμμετρικού 4×4 πίνακα, με ορίζουσα $\det K \neq 0$.

Άσκηση 2.10 Δείξτε οτι εάν Q είναι ορθογώνιος πίνακας, τότε $\det Q = \pm 1$.

Άσκηση 2.11 Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα A με απαλοιφή, και κατόπιν βρείτε τις ορίζουσες των πινάκων B, C, AB, $A^T A$ και C^T.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.12 Επαληθεύστε οτι η 3×3 ορίζουσα Vandermonde είναι

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Άσκηση 2.13 Εάν ο $n \times n$ πίνακας A έχει στοιχεία $a_{ij} = ij$, δείξτε οτι $\det A = 0$, εκτός εάν $A = [1]$.

Άσκηση 2.14 Χρησιμοποιήστε απαλοιφή για να υπολογίσετε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2 & t & 1 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 2.15 Εάν ο $n \times n$ πίνακας A έχει στοιχεία $a_{ij} = i + j$, δείξτε οτι $\det A = 0$, εκτός εάν $n = 1$ ή 2.

Άσκηση 2.16 Φέρτε τους πίνακες σε άνω τριγωνική μορφή και υπολογίστε την ορίζουσα.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.17 Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να φέρετε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

σε τριγωνική μορφή και να υπολογίσετε την ορίζουσα.
(Καταγράψετε τυχόν εναλλαγές γραμμών για να προσδιορίσετε το πρόσημο.)

Άσκηση 2.18 Εάν γνωρίζετε οτι η ορίζουσα του A είναι 6, βρείτε την ορίζουσα του B, όπου οι γραμμές του A είναι a_1, a_2, a_3 και οι γραμμές του B είναι $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_1$.

Άσκηση 2.19 Πως συνδέονται οι $\det(2A)$, $\det(-A)$ και $\det(A^2)$ με την $\det A$, όταν A είναι πίνακας n επί n;

Άσκηση 2.20 Προσδιορίστε εάν οι ακόλουθες μεταθέσεις είναι άρτιες ή περιττές

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,1\,4\,2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix} .$$

Γράψτε τους 4×4 πίνακες που τις παριστάνουν, και υπολογίστε τις ορίζουσες.

Άσκηση 2.21 Υπολογίστε τις ορίζουσες

α′. Του πίνακα τάξεως 1, $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

β′. Του άνω τριγωνικού πίνακα $U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

γ′. Του πίνακα κάτω τριγωνικού πίνακα U^T.

δ′. Του πίνακα U^{-1}.

ε′. Του πίνακα $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$, που προκύπτει από εναλλαγές γραμμών.

Άσκηση 2.22 Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\begin{bmatrix} a-mc & b-md \\ c-la & d-lb \end{bmatrix}$ χρησιμοποιώντας τη γραμμική εξάρτηση της ορίζουσας σε κάθε γραμμή.

Άσκηση 2.23 Εάν $B = M^{-1}AM$, γιατί ισχύει $\det B = \det A$; Δείξτε επίσης οτι $\det A^{-1}B = 1$.

Υπολογισμός της Ορίζουσας

Γνωρίζουμε οτι κάθε μη ιδιόμορφος $n \times n$ πίνακας παραγοντοποιείται στη μορφή

$$A = P^{-1}\, L\, D\, U' \,,$$

όπου P είναι πίνακας μετάθεσης, L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο, D είναι διαγώνιος πίνακας με τους οδηγούς στη διαγώνιο, και U' είναι άνω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο.

Από τα προηγούμενα έχουμε $\det P = \pm 1$, $\det L = \det U' = 1$ και $\det D$ ισούται με το γινόμενο των οδηγών. Άρα

$$\begin{aligned} \det A &= \det P^{-1} \det L \det D \det U' \\ &= \pm\, (\text{γινόμενο των οδηγών})\ . \end{aligned}$$

Αυτός είναι ο πρακτικότερος τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας: χρησιμοποιούμε απαλοιφή για να φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή, η ορίζουσα είναι ίση με το γινόμενο των οδηγών πολλαπλασιασμένο με $(-1)^k$, όπου k είναι ο αριθμός των εναλλαγών γραμμών που χρησιμοποιήσαμε στην απαλοιφή.

2.5 Ο τύπος για την ορίζουσα

Από θεωρητική άποψη θα θέλαμε να γνωρίζουμε τον τρόπο εξάρτησης της ορίζουσας από κάθε συνιστώσα του πίνακα, δηλαδή έναν τύπο για την ορίζουσα ανάλογο με το $\det A = ad - bc$ για 2×2 πίνακες. Ας δούμε πώς μπορούμε να αποδείξουμε αυτόν τον τύπο απο τις ιδιότητες της ορίζουσας:

Η πρώτη γραμμή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $[a\, b] = [a\, 0] + [0\, b]$, και συνεπώς

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} \\ &= 0 + ad + (-bc) + 0 \end{aligned}$$

Αν εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία σε έναν $n \times n$ πίνακα, έχουμε, για την πρώτη γραμμή:

$$[a_{11} \ldots a_{1n}] = [a_{11}\, 0 \ldots 0] + [0\, a_{12}\, 0 \ldots 0] + \cdots + [0 \ldots 0\, a_{1n}]$$

άρα η ορίζουσα του πίνακα ισούται με το άθροισμα των οριζουσών n πινάκων, ο κάθε ένας από τους οποίους έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη γραμμή. Επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία για τη δεύτερη γραμμή, και έχουμε το άθροισμα των οριζουσών n^2 πινάκων, ο κάθε ένας από τους οποίους έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μία από τις δύο πρώτες γραμμές. Επαναλαμβάνουμε για όλες τις γραμμές του πίνακα, και καταλήγουμε με το άθροισμα των οριζουσών n^n πινάκων, ο κάθε ένα από τους οποίους έχει σε κάθε γραμμή μόνον ένα στοιχείο που μπορεί να μην είναι ίσο με 0. Υποθέτουμε οτι στην i γραμμή το στοιχείο που μπορεί να μην είναι 0 βρίσκεται στη j_i στήλη, είναι δηλαδή το στοιχείο a_{ij_i} .

Εξετάζουμε έναν από αυτούς τους n^n πίνακες. Έχει το πολύ n μη μηδενικά στοιχεία. Εάν δύο απο τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στην ίδια στήλη, τότε υπάρχει μία στήλη που περιέχει μόνο μηδέν, και συνεπώς η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδέν. Συμπεραίνουμε οτι η ορίζουσα του πίνακα δεν μηδενίζεται μόνον όταν η αντιστοιχία $i \mapsto j_i$ δεν απεικονίζει δύο διαφορετικά i στο ίδιο j, δηλαδή εάν είναι μετάθεση του συνόλου $\{1, \ldots, n\}$. Γνωρίζουμε οτι υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις, και συνεπώς μόνο $n!$ απο τις n^n ορίζουσες μπορεί να μην είναι ίσες με μηδέν.

Ας εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία σε ένα 3×3 πίνακα. Για το σύνολο $\{1, 2, 3\}$ υπάρχουν $3! = 6$ μεταθέσεις, τρεις άρτιες

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

και τρεις περιττές

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα εκφράζεται ως άθροισμα 6 οριζουσών,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad = \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \\
& + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
= \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
& - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

Για κάθε μετάθεση $\sigma : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, P_σ είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν εφαρμόσουμε τη μετάθεση σ στις γραμμές του ταυτοτικού 3×3 πίνακα $\mathbf{I}$. Τότε $\det P_\sigma$ είναι 1 εάν η μετάθεση είναι άρτια και -1 εάν η μετάθεση είναι περιττή. Ο όρος $a_{1\,\sigma(1)}a_{2\,\sigma(2)}a_{3\,\sigma(3)}$

πολλαπλασιάζεται με $\det P_\sigma$. Έτσι ο τύπος για μία 3×3 ορίζουσα εκφράζεται ως άθροισμα, πάνω από το σύνολο όλων των μεταθέσεων 3 στοιχείων,

$$\det A = \sum_\sigma a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} a_{3\,\sigma(3)} \, \det(P_\sigma)\,.$$

Η προηγούμενη ανάλυση γενικεύεται σε $n \times n$ πίνακες, και δίδει τον ακόλουθο τύπο για την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα.

Θεώρημα 2.8 *Εάν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ πίνακας,*

$$\det A = \sum_\sigma a_{1\,\sigma(1)} \dots a_{n\,\sigma(n)} \, \det(P_\sigma) \tag{2.2}$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται πάνω από το σύνολο όλων των μεταθέσεων n στοιχείων, και P_σ είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν εφαρμόσουμε τη μετάθεση σ στις γραμμές του ταυτοτικού πίνακα.

Παράδειγμα 2.2 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Εάν $\sigma(1) = 1$, ο όρος περιλαμβάνει τη συνιστώσα a_{11}, και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνιστώσες a_{13} και a_{31} που βρίσκονται στην •δια γραμμή ή την ίδια στήλη με την a_{11}. Τότε η μόνη μετάθεση που δίδει μη μηδενικό όρο είναι η ταυτοτική, που δίδει τον όρο $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

Εάν $\sigma(1) = 3$, ο όρος περιλαμβάνει τη συνιστώσα a_{13}, και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνιστώσες a_{11} και a_{33}. Η μόνη μετάθεση που δίδει μη μηδενικό όρο είναι η $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, που δίδει τον όρο $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$. Αυτή η μετάθεση είναι μία εναλλαγή, άρα εμφανίζεται με πρόσημο -1. Η ορίζουσα είναι $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$.

2.6 Ανάπτυγμα της ορίζουσας

Παράδειγμα 2.3 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 3 & 0 \\ 5 & 17 & 19 & 11 \\ 7 & 17 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

Για να γράψουμε συστηματικά όλους τους όρους στον τύπο 2.2 για την ορίζουσα του A, ξεκινάμε με τους όρους που περιέχουν το 2 από την πρώτη γραμμή. Αυτοί οι όροι δεν περιέχουν καμμία άλλη συνιστώσα από την πρώτη γραμμή ή από την πρώτη στήλη. Άρα οι υπόλοιποι παράγοντες αυτών των όρων προέρχονται από τις συνιστώσες του 3×3 πίνακα $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ένας από κάθε γραμμή και κάθε στήλη. Η ορίζουσα του B έχει μόνο δύο μη μηδενικούς όρους, τους $-3 \cdot 5 \cdot 13 + 3 \cdot 7 \cdot 11$. Η ορίζουσα του A έχει επίσης μόνο δύο μη μηδενικους όρους, τους $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ της ορίζουσας ενός $n \times n$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ και των οριζουσών των $(n-1) \times (n-1)$ πινάκων που προκύπτουν από τον A όταν διαγράψουμε μία γραμμή και μία στήλη. Ειδικότερα θα εξετάσουμε πώς καθορίζονται τα πρόσημα αυτών των οριζουσών μέσα στην παράσταση για την $\det A$.

Θα εξετάσουμε την περίπτωση ενός 4×4 πίνακα, πριν δούμε το αποτέλεσμα για $n \times n$ πίνακα. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Γνωρίζουμε οτι $\det A$ είναι το άθροισμα 24 όρων, ένα για κάθε μετάθεση σ του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$. Θεωρούμε τις μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$. Οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα (2.2) περιέχουν τον παράγοντα a_{11}. Βγάζουμε το a_{11} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{11} το νέο άθροισμα:

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{11}\, a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)} \det P_\sigma = a_{11} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)} \det P_\sigma \right) = a_{11} C_{11}\,.$$

Στο άθροισμα C_{11} εμφανίζονται μόνο συνιστώσες του πίνακα που δεν βρίσκονται στην πρώτη γραμμή ή στην πρώτη στήλη. Συμβολίζουμε A_{11} τον πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \times & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \times & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Οι μεταθέσεις του $\{1, 2, 3, 4\}$ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$, αντιστοιχούν σε μεταθέσεις του $\{2, 3, 4\}$. Συμβολίζουμε σ' τη μετάθεση του $\{2, 3, 4\}$ που αντιστοιχεί στη μετάθεση σ του $\{1, 2, 3, 4\}$. Παρατηρούμε οτι αφού $\sigma(1) = 1$, οι εναλλαγές που συνθέτουν τη σ' είναι όσες και οι εναλλαγές που συνθέτουν τη σ. Συνεπώς $\det P_{\sigma'} = \det P_\sigma$. Συμπεραίνουμε οτι το άθροισμα C_{11} είναι ακριβώς η ορίζουσα του A_{11}.

$$C_{11} \;=\; \sum_{\substack{\sigma \text{ μετάθεση του } \{1,\,2,\,3,\,4\} \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)} \det P_\sigma$$

$$= \sum_{\sigma' \text{ μετάθεση του } \{2,\,3,\,4\}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)} \,\det P'_{\sigma}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} .$$

Τώρα θεωρούμε τις μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = 2$. Οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα (2.2) περιέχουν τον παράγοντα a_{12}. Βγάζουμε το a_{12} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{12} το νέο άθροισμα:

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{12}\, a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)} \,\det P_{\sigma} = a_{12} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)} \,\det P_{\sigma} \right) = a_{12}\, C_{12}.$$

Στο άθροισμα C_{12} εμφανίζονται μόνο συνιστώσες του πίνακα που δεν βρίσκονται στην πρώτη γραμμή ή στη δεύτερη στήλη. Συμβολίζουμε A_{12} τον πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη δεύτερη στήλη:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ a_{21} & \times & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \times & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \times & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} .$$

Κάθε μετάθεση σ του $\{1,\,2,\,3,\,4\}$ για την οποία $\sigma(1) = 2$, αντιστοιχεί σε μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\rho : \{2,\,3,\,4\} \longrightarrow \{1,\,3,\,4\}$. Άρα το άθροισμα C_{12} περιέχει όλους τους όρους της ορίζουσας του A_{12}, αλλά ενδεχομένως με διαφορετικό πρόσημο, αφού η ρ μπορεί να συντίθεται από διαφορετικό αριθμό εναλλαγών απ' οτι η σ.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τα αθροίσματα C_{13} και C_{14},

$$C_{13} = \sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=3}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)} \,\det P_{\sigma} \,,$$
$$C_{14} = \sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=4}} a_{2\,\sigma(2)}\, a_{3\,\sigma(3)}\, a_{4\,\sigma(4)} \,\det P_{\sigma} \,.$$

και να εξετάσουμε τη σχέση τους με τις ορίζουσες των πινάκων A_{13} και A_{14}, που προκύπτουν από τον A όταν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την τρίτη ή την τέταρτη στήλη. Τότε το *ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A ως προς την πρώτη γραμμή* είναι

$$\det A = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + a_{13}\, C_{13} + a_{14}\, C_{14} \,.$$

Για να κατανοήσουμε τη σχέση μεταξύ των αθροισμάτων C_{1j} και των πινάκων A_{1j}) εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Για $j = 1,\,2,\,3,\,4$ θεωρούμε τις αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις

$$\tau_j = \{1,\,2,\,3\} \longrightarrow \{1,\,2,\,3,\,\} \setminus \{j\}$$

που διατηρούν τη διάταξη των φυσικών αριθμών.

Για κάθε μετάθεση σ του $\{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$, και κάθε $i = 1,\, 2,\, 4,\, 4$, ορίζεται μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\rho : \{2,\, 3,\, 4\} \longrightarrow \{1,\, 2,\, 3,\, 4\} \setminus \{\sigma(1)\}$. Θα αντιστοιχίσουμε την ρ σε μία μετάθεση του σ_1 του συνόλου $\{1,\, 2,\, 3\}$. Ορίζουμε τη σ_1 ως τη σύνθεση $\sigma_i = \tau_{\sigma(1)}^{-1} \circ \sigma \circ \tau_1$:

$$\{1,\, 2,\, 3\} \xrightarrow{\tau_i} \{2,\, 3,\, 4\} \xrightarrow{\sigma} \{1,\, 2,\, 3,\, 4\} \setminus \{\sigma(1)\} \xrightarrow{\tau_{\sigma(1)}^{-1}} \{1,\, 2,\, 3\}\,.$$

Για παράδειγμα τ_2 είναι η απεικόνιση $\tau_2 : \{1,\, 2,\, 3\} \longrightarrow \{1,\, 3,\, 4\}$ για την οποία

$$\tau_2(1) = 1,\; \tau_2(2) = 3,\; \tau_2(3) = 4\,.$$

Εάν σ είναι η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, τότε $\sigma_1 = \tau_2^{-1} \circ \sigma \circ \tau_1$ είναι η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & \tau_1 & & \sigma & & \tau_2^{-1} & \\ 1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 3 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 3\,. \end{array} \tag{2.3}$$

Εάν σ είναι μία μετάθεση του $\{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$, γνωρίζουμε οτι ο όρος $a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} a_{3\,\sigma(3)} a_{4\,\sigma(4)}$ εμφανίζεται στον τύπο για την ορίζουσα του πίνακα A πολλαπλασιασμένος με $\det P_\sigma$. Με το συμβολισμό που εισαγάγαμε, εάν $\sigma(1) = j$, ο όρος $a_{2\,\sigma(2)} a_{3\,\sigma(3)} a_{4\,\sigma(4)}$ εμφανίζεται στον τύπο για την ορίζουσα του πίνακα $A_{1\,\sigma(1)}$ πολλαπλασιασμένος με $\det P_{\sigma_1}$. Έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ του αθροίσματος $C_{1\,\sigma(1)}$ και της ορίζουσας $\det A_{1\,\sigma(1)}$. Το ακόλουθο Λήμμα δίδει τη σχέση μεταξύ της $\det P_\sigma$ και της $\det P_{\sigma_1}$.

Λήμμα 2.9 *Για κάθε μετάθεση σ, με τον παραπάνω συμβολισμό,*

$$\det P_\sigma = (-1)^{1+\sigma(1)} \det P_{\sigma_1}\,.$$

Απόδειξη. Για κάθε μετάθεση με $\sigma(1) = 1$, όπως έχουμε παρατηρήσει,

$$\det P_\sigma = \det P_{\sigma_1}\,.$$

Στη γενική περίπτωση, $\sigma(1) = j$, ο πίνακας P_σ έχει συνιστώσα 1 στη θέση $(1\,j)$. Εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την j στήλη από τον πίνακα P_σ, παίρνουμε το πίνακα P_{σ_1}. Στο παράδειγμα (2.3),

$\sigma_n(k) = \sigma(k)$ για κάθε $k \in \{1,\, \dots,\, n-1\}$. Είναι φανερό οτι

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} P_{\sigma_n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix},$$

και συνεπώς

εφόσον απαιτείται ο ίδιος αριθμός εναλλαγών γραμμών και στηλών για να καταλήξουμε στον ταυτοτικό πίνακα.

Στη γενική περίπτωση, για $i \in \{1, \ldots, n\}$, μετατρέπουμε τον πίνακα P_σ στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} P_{\sigma_n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Χρειάζονται $n-i$ εναλλαγές γραμμών για να μετακινηθεί η συνιστώσα του $\mathbb{P}_\sigma$ από τη θέση $(i,\, \sigma(i))$ στη θέση $(n,\, \sigma(i))$, και $n-\sigma(i)$ εναλλαγές στηλών για να μετακινηθεί από τη θέση $(n,\, \sigma(i))$ στη θέση $(n,\, n)$. Συνεπώς

$$\det P_\sigma = (-1)^{(n-i)+(n-\sigma(i))} \begin{vmatrix} P_{\sigma_i} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+\sigma(i)} \det P_{\sigma_i}\,.$$

□

Θεωρούμε τις μεταθέσεις σ του συνόλου $\{1, \ldots, n\}$ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$. Οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα (2.2) περιέχουν τον παράγοντα a_{11}. Βγάζουμε το a_{11} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{11} το νέο άθροισμα:

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{11}\, a_{2\,\sigma(2)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma = a_{11} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \right) = a_{11} C_{11}\,.$$

Συμβολίζουμε A_{11} τον πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \times & \times & \ldots & \times \\ \times & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Οι μεταθέσεις του $\{1, 2, \ldots, n\}$ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$, αντιστοιχούν σε μεταθέσεις του $\{2, 3, \ldots, n\}$. Άρα το άθροισμα C_{11} είναι ακριβώς η ορίζουσα του πίνακα A_{11}

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{\substack{\text{μετάθεση του } \{1,\, \ldots,\, n\} \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \\ &= \sum_{\text{μετάθεση του } \{2,\, \ldots,\, n\}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \\ &= \begin{vmatrix} \times & \times & \ldots & \times \\ \times & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Τώρα θεωρούμε τις μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = 2$. Οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα (2.2) περιέχουν τον παράγοντα a_{12}. Βγάζουμε το a_{12} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{12} το νέο άθροισμα:

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{12}\, a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \;=\; a_{12} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma \right) \;=\; a_{12}\, C_{12}.$$

Κάθε μετάθεση σ του $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ για την οποία $\sigma(1) = 2$, αντιστοιχεί σε μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση απο το $\{2,\, 3,\, \ldots,\, n\}$ στο $\{1,\, 3,\, 4,\, \ldots,\, n\}$, και το άθροισμα C_{12} διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο απο την ορίζουσα του πίνακα A_{12} που προκύπτει απο τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη δεύτερη στήλη:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \ldots & \times \\ a_{21} & \times & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \times & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

και

$$C_{12} = \sum_{\substack{\text{μετάθεση του } \{1,\, \ldots,\, n\} \\ \sigma(1)=2}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma = \pm \det A_{12}\,.$$

Για να δούμε πώς διαφέρει το πρόσημο του C_{12} από αυτό της ορίζουσας $\det A_{12}$, εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Για $j = 1, \ldots, n$ θεωρούμε τις αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις

$$\tau_j = \{1, \ldots, n-1\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$$

που διατηρούν τη διάταξη των φυσικών αριθμών. Για κάθε μετάθεση σ του $\{1, \ldots, n\}$, και κάθε $i = 1, \ldots, n$, ορίζουμε τη μετάθεση σ_i του $\{1, \ldots, n-1\}$ ως τη σύνθεση $\sigma_i = \tau_{\sigma(i)}^{-1} \circ \sigma \circ \tau_i$:

$$\{1, \ldots, n-1\} \xrightarrow{\tau_i} \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\} \xrightarrow{\sigma} \{1, \ldots, n\} \backslash \{\sigma(i)\} \xrightarrow{\tau_{\sigma(i)}^{-1}} \{1, \ldots, n-1\}\,.$$

Για παράδειγμα, εάν $n = 4$, τ_2 είναι η απεικόνιση $\tau_2 : \{1,\, 2,\, 3\} \longrightarrow \{1,\, 3,\, 4\}$ για την οποία

$$\tau_2(1) = 1,\ \tau_2(2) = 3,\ \tau_2(3) = 4\,.$$

Εάν σ είναι η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, τότε $\sigma_2 = \tau_3^{-1} \circ \sigma \circ \tau_2$ είναι η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & \tau_2 & & \sigma & & \tau_3^{-1} & \\ 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 3\,. \end{array}$$

Στη γενική περίπτωση, εάν $\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$, και $i \in \{1, \ldots, n\}$, για κάθε $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, η σ_i δίδεται από

$$\sigma_i(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{εάν } k < i \text{ και } \sigma(k) < \sigma(i) \\ \sigma(k) - 1 & \text{εάν } k < i \text{ και } \sigma(k) \geq \sigma(i) \\ \sigma(k+1) & \text{εάν } k \geq i \text{ και } \sigma(k+1) < \sigma(i) \\ \sigma(k+1) - 1 & \text{εάν } k \geq i \text{ και } \sigma(k+1) \geq \sigma(i). \end{cases}$$

Λήμμα 2.10 *Για κάθε μετάθεση σ, με τον παραπάνω συμβολισμό,*

$$\det P_\sigma = (-1)^{i+\sigma(i)} \det P_{\sigma_i}$$

Απόδειξη. Εάν $\sigma(n) = n$, τότε $\sigma_n(k) = \sigma(k)$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Είναι φανερό οτι

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} P_{\sigma_n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix},$$

και συνεπώς

$$\det P_\sigma = \det P_{\sigma_n}\,.$$

εφόσον απαιτείται ο ίδιος αριθμός εναλλαγών γραμμών και στηλών για να καταλήξουμε στον ταυτοτικό πίνακα.

Στη γενική περίπτωση, για $i \in \{1, \ldots, n\}$, μετατρέπουμε τον πίνακα P_σ στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} P_{\sigma_n} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Χρειάζονται $n - i$ εναλλαγές γραμμών για να μετακινηθεί η συνιστώσα του $\mathbb{P}_\sigma$ από τη θέση $(i, \sigma(i))$ στη θέση $(n, \sigma(i))$, και $n - \sigma(i)$ εναλλαγές στηλών για να μετακινηθεί από τη θέση $(n, \sigma(i))$ στη θέση (n, n). Συνεπώς

$$\det P_\sigma = (-1)^{(n-i)+(n-\sigma(i))} \begin{vmatrix} P_{\sigma_i} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+\sigma(i)} \det P_{\sigma_i}\,.$$

□

Με τον παραπάνω συμβολισμό, τ_1 είναι η απεικόνιση $\tau_1(i) = i + 1$, από το $\{1, \ldots, n-1\}$ στο $\{2, \ldots, n\}$, και

$$C_{12} \;=\; \sum_{\substack{\sigma \text{ μετάθεση του } \{1,\ldots,n\} \\ \sigma(1)=2}} a_{\tau_1(1)\ \sigma\circ\tau_1(1)} \cdots a_{\tau_1(n-1)\ \sigma\circ\tau_1(n-1)} \,(-1)^{1+2} \det P_{\sigma_1}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{\rho \text{ μετάθεση του } \{1,\,\ldots\,,n-1\}} a_{\tau_1(1)\ \tau_2\circ\rho(1)} \cdots a_{\tau_1(n-1)\ \tau_2\circ\rho(n-1)} \det P_\rho \\
&= -\det A_{12}.
\end{aligned}
$$

Γενικότερα θεωρούμε τους όρους στο άθροισμα (2.2) που αντιστοιχούν σε μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma\,(1) = j$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma\,(1)=j}} a_{1\,j}\, a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma &= a_{1j} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma\,(1)=j}} a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma \right) \\
&= a_{1\,j}\, C_{1\,j}
\end{aligned}
$$

Το άθροισμα $C_{1\,j}$ διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο απο την ορίζουσα του πίνακα A_{1j} που προκύπτει απο τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη j στήλη.

$$
A_{1j} = \begin{bmatrix} \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,(j-1)} & \times & a_{2\,(j+1)} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,(j-1)} & \times & a_{n\,(j+1)} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,(j-1)} & a_{2\,(j+1)} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,(j-1)} & a_{n\,(j+1)} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}
$$

και

$$
C_{1j} = (-1)^{1+j} \det(A_{1\,j})\,.
$$

Θεωρούμε τώρα όλες τις μεταθέσεις σ του $\{1,\,\ldots\,,n\}$, ομαδοποιημένες ανάλογα με την τιμή του $\sigma\,(1)$ και έχουμε

$$
\det A = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma\,(1)=j}} a_{1\,j}\, a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{1\,j} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma\,(1)=j}} a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma \right).
$$

Καταλήγουμε στο *ανάπτυγμα της ορίζουσας* $\det A$ *ως προς την πρώτη γραμμή*:

$$
\det A \,=\, a_{11}\, C_{11} \,+\, a_{12}\, C_{12} \,+\, \cdots \,+\, a_{1\,n}\, C_{1\,n}\,.
$$

Ορισμός 2.3. Εάν $A = (a_{i\,j})$ είναι ένας $n\times n$ πίνακας, ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας ο οποίος προκύπτει απο το A εάν διαγράψουμε την i γραμμή και τη j στήλη, ονομάζεται **ελάσσων πίνακας** της συνιστώσας $a_{i\,j}$ του A.

$$
A_{i\,j} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,(j-1)} & a_{1\,(j+1)} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)\,1} & \cdots & a_{(i-1)\,(j-1)} & a_{(i-1)\,(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)\,n} \\ a_{(i+1)\,1} & & a_{(i+1)\,(j-1)} & a_{(i+1)\,(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,(j-1)} & a_{n\,(j+1)} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}
$$

Ο αριθμός $C_{i\,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i\,j}$ ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** ή **συμπαράγοντας** της συνιστώσας $a_{i\,j}$.

Ένας εύκολος τρόπος να παραστήσουμε το πρόσημο του συμπαράγοντα C_{ij} είναι ο ακόλουθος πίνακας.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Η προηγούμενη μελέτη γενικεύεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.11 *α΄. Για κάθε* $i = 1, \ldots, n$ *ισχύει*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\, C_{i\,j}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\det A$ *ως προς την* i*-γραμμή.*

β΄. Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ *ισχύει*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j}\, C_{i\,j}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\det A$ *ως προς τη* j*-στήλη.*

Παράδειγμα 2.4 Το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ως προς την πρώτη γραμμή είναι

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= +1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
& \quad +(-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1(2+2+2-1-1-8) - 2(2+1-2+1-1-4) \\
& \quad -3(4+1-1+2-1-2) + 4(2+2-1+4-1-1) \\
&= 25\,.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.5 Το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα του παραδείγματος 2.3, ως προς την τρίτη στήλη είναι

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 3 & 0 \\ 5 & 17 & 19 & 11 \\ 7 & 17 & 0 & 13 \end{vmatrix} &= -3\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 17 & 11 \\ 7 & 17 & 13 \end{vmatrix} + 19\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 7 & 17 & 13 \end{vmatrix} \\
&= -3(-2(5\cdot 13 - 11\cdot 7)) + 19(0\cdot 13 - 0\cdot 7) \\
&= 2\cdot 3\cdot 5\cdot 13 - 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\,.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.6 Ένας **τριδιαγώνιος πίνακας** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει μηδέν όλες τις συνιστώσες εκτός από τις a_{ij} για τις οποίες $i - j = -1$, 0 ή 1. Αυτές οι συνιστώσες βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο και στις δύο διαγωνίους πάνω και κάτω από την κύρια.

Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του τριδιαγώνιου πίνακα

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\det A_4 = 2(-1)^{1+1}\,\det(A_4)_{11} + (-1)(-1)^{1+2}\,\det(A_4)_{12}$$

όπου

$$(A_4)_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A_3$$

και

$$(A_4)_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του $(A_4)_{12}$ ως προς την πρώτη στήλη έχουμε $\det(A_4)_{12} = (-1)(-1)^{1+1}\,\det A_2$. Άρα

$$\det A_4 = 2\,\det A_3 - \det A_2\,.$$

Παρόμοια δείχνουμε οτι για τον $n \times n$ τριδιαγώνιο πίνακα A_n με 2 στην κύρια διαγώνιο και (-1) στις άλλες δύο διαγωνίους ισχύει,

$$\det A_n = 2\det A_{n-1} - \det A_{n-2}.$$

2.7 Ασκήσεις

Άσκηση 2.24 Είναι οι ακόλουθες προτάσεις αληθείς ή ψευδείς;

α΄. Η ορίζουσα του πίνακα $S^{-1}AS$ είναι ίση με την ορίζουσα του A.

β΄. Εάν $\det A = 0$, τότε τουλάχιστον ένας από τους συμπαράγοντες είναι 0.

γ΄. Ένας πίνακας με στοιχεία 0 και 1 έχει ορίζουσα 1, 0 ή -1.

Άσκηση 2.25 Τι πρόσημο έχει ο όρος $a_{15}\, a_{24}\, a_{33}\, a_{42}\, a_{51}$ στον τύπο για την ορίζουσα ενός 5×5 πίνακα. Δηλαδή είναι η μετάθεση $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ περιττή ή άρτια;

Άσκηση 2.26 Εάν F_n είναι η ορίζουσα του $n \times n$ τριδιαγώνιου πίνακα με στοιχεία $1, 1, -1$,

$$F_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

δείξτε οτι $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Η ακολουθία F_n είναι η ακολουθία Fibonacci, $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$.

Άσκηση 2.27 Για τους ακόλουθους πίνακες βρείτε τον μοναδικό μη μηδενικό όρο στον τύπο για την ορίζουσα.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπάρχει μόνον ένας τρόπος να επιλέξετε 4 μη μηδενικά στοιχεία από διαφορετικές γραμμές και στήλες. Υπολογίστε τις ορίζουσες $\det A$ και $\det B$.

Άσκηση 2.28 Για τους πίνακες της Άσκησης 2.27, αναπτύξτε τις ορίζουσες ως προς την πρώτη γραμμή. Υπολογίστε τους συμπαράγοντες (μη ξεχάσετε το πρόσημο $(-1)^{i+j}$) και τις ορίζουσες $\det A$ και $\det B$.

Άσκηση 2.29 Εξετάστε τους τριδιαγώνιους $n \times n$ πίνακες με 1 στις τρεις διαγωνίους:

$$A_1 = [1] \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ldots$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα D_n του A_n.

α'. Αναπτύξτε την ορίζουσα σε συμπαράγοντες κατά μήκος της πρώτης γραμμής, και δείξτε οτι $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$.

β'. Ξεκινώντας με $D_1 = 1$ και $D_2 = 0$, βρείτε τις D_3, D_4, $\ldots$, D_8. Παρατηρήστε την περιοδικότητα στις τιμές της D_n, και βρείτε την D_{1000}.

Άσκηση 2.30

α'. Βρείτε την παραγοντοποίηση LU, τους οδηγούς και την ορίζουσα του 4×4 πίνακα με στοιχεία $a_{ij} = \min\{i, j\}$.

β'. Βρείτε την ορίζουσα του $A = (a_{ij})$, εάν $a_{ij} = \min\{n_i, n_j\}$ και $n_1 = 2$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$, $n_4 = 10$. Μπορείτε να βρείτε γενικό κανόνα για οποιουσδήποτε αριθμούς $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$;

Άσκηση 2.31 Χρησιμοποιήστε τον τύπο της ορίζουσας για να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

όπου C είναι ο 6×6 πίνακας με μπλοκ τους πίνακες A και B. Είναι οι στήλες αυτών των πινάκων γραμμικά ανεξάρτητες;

Άσκηση 2.32 Τοποθετήστε τον ελάχιστο αριθμό από 0 σε ένα 4×4 πίνακα, που εξασφαλίζουν οτι η ορίζουσα είναι 0. Τοποθετήστε όσο το δυνατόν περισσότερα μηδενικά, που να επιτρέπουν στην ορίζουσα να είναι διαφορετική από 0.

Άσκηση 2.33 Εάν $\det A \neq 0$, τουλάχιστον ένας από τους $n!$ όρους του τύπου της ορίζουσας δεν είναι 0. Συμπεράνετε οτι υπάρχει κάποια μετάθεση P των γραμμών του A τέτοια ώστε να μην υπάρχουν 0 στη διαγώνιο του PA.

Άσκηση 2.34 Βρείτε τους συμπαράγοντες και τον προσαρτημένο πίνακα. Κατόπιν πολλαπλασιάστε με τον αρχικό πίνακα. Τι παρατηρείτε;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.35 Υπολογίστε τις ορίζουσες των 1, 3, 1 τριδιαγώνιων πινάκων

$$C_1 = [3], \quad C_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Μπορείτε να μαντέψετε την $\det C_4$; (Θυμηθείτε τους αριθμούς Fibonacci).
Χρησιμοποιήστε ανάπτυγμα σε συμπαράγοντες για να δείξετε την αναδρομική σχέση

$$\det C_n = 3 \det C_{n-1} - \det C_{n-2}\,.$$

Δείξτε οτι $\det C_n$ είναι ο αριθμός F_{2n+2} της ακολουθίας Fibonacci (Πρώτα δείξτε οτι $F_{2n+2} = 3F_{2n} - F_{2n-2}$)

Άσκηση 2.36 Εξηγήστε γιατί, εάν A και D είναι τετραγωνικοί πίνακες,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A|\;|D|\,.$$

Βρείτε ένα παράδειγμα με 2×2 πίνακες για να δείξετε οτι

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |A|\,|D| - |C|\,|B|.$$

Άσκηση 2.37 Υποθέστε οτι $CD = -DC$ και βρείτε το λάθος στον επόμενο συλλογισμό: Παίρνοντας τις ορίζουσες, έχουμε $(\det C)(\det D) = -(\det D)\,(\det C)$, άρα ένας από τους C και D έχει μηδενική ορίζουσα. Συνεπώς, η $CD = -DC$ είναι δυνατή μόνον όταν ο C ή ο D είναι ιδιόμορφος.

Άσκηση 2.38 Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Γιά ποιές τιμές του λ είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος;

Άσκηση 2.39 Έστω

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

α'. Χρησιμοποιήστε κατάλληλη πράξη μεταξύ των γραμμών του B για να έχετε μια γραμμή με δύο μηδενικά, και χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τη γραμμή, για να υπολογίσετε την ορίζουσα του B.

β'. Υπολογίστε όλους τους συμπαράγοντες του πίνακα B. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα συμπαραγόντων για να υπολογίσετε τον αντίστροφο του B.

2.8 Εφαρμογές των Οριζουσών

Υπολογισμός του αντιστρόφου

Έχουμε δει οτι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $\det A \neq 0$.

Ορισμός 2.4. Θεωρούμε τον πίνακα συμπαραγόντων $C = (C_{ij})$ που έχει ως στοιχείο στη θέση (i, j) τον συμπαράγοντα του στοιχείου a_{ij} του A. Ο **ανάστροφος** αυτού του πίνακα, C^T, ονομάζεται **προσαρτημένος πίνακας** του A (ή **συζυγής πίνακας** του A), και συμβολίζεται $\operatorname{adj} A$,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Λήμμα 2.12 *Εάν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ πίνακας, C_{ij} ο συμπαράγων του στοιχείου a_{ij}, και $b = (b_1, \dots, b_n)$ διάνυσμα, τότε*

$$b_1 C_{i1} + b_2 C_{i2} + \cdots + b_n C_{in}$$

είναι η ορίζουσα του πίνακα B^i που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε το b στην i γραμμή του πίνακα A,

$$B^i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

και

$$b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}$$

είναι η ορίζουσα του πίνακα B_j που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε το b στην j στήλη του πίνακα A,

$$B_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Απόδειξη. Τα στοιχεία της j στήλης του πίνακα A δεν εμφανίζονται στους συμπαράγοντες $C_{1j}, \cdots, C_{nj}$. Συνεπώς αυτοί οι συμπαράγοντες του A είναι ίσοι με τους συμπαράγοντες του πίνακα B_j. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας του B_j ως προς τη j-στήλη είναι

$$\det B_j = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}.$$

Το αποτέλεσμα για τους πίνακες B^i αποδεικνύεται ανάλογα.

□

Πρόταση 2.13 *Εάν A είναι $n \times n$ πίνακας,*

$$A\,(\mathrm{adj}\ A) = (\mathrm{adj}\ A)\,A = \det A \cdot \mathbf{I}_n.$$

Πριν δούμε την απόδειξη της Πρότασης 2.13, υπολογίζουμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.7 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Η ορίζουσα του πίνακα A είναι $\det A = -4$.

Υπολογίζουμε τους συμπαράγοντες του πίνακα A.

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

και βρίσκουμε τον πίνακα συμπαραγόντων

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \\ 7 & -5 & -1 \end{bmatrix},$$

και τον προσαρτημένο πίνακα

$$\operatorname{adj} A = C^T = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το γινόμενο $A \operatorname{adj} A$,

$$\begin{aligned} A \operatorname{adj} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -8 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \det A\, \mathbf{I}_3 . \end{aligned}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε οτι όταν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα A με τον προσαρτημένο πίνακα $\operatorname{adj} A$, η συνιστώσα στη θέση $(i,\, j)$ είναι το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ \vdots \\ C_{jn} \end{bmatrix} = a_{i\,1}C_{j\,1} + a_{i\,2}C_{j\,2} + \cdots + a_{i\,n}C_{j\,n} .$$

Προσέξτε τη θέση των δεικτών, υπενθυμίζουμε οτι $\operatorname{adj} A = (C_{i\,j})^T$.

Εάν $i = j$, το άθροισμα είναι ακριβώς το ανάπτυγμα της $\det A$ ως προς την i-γραμμή. Εάν $i \neq j$ το άθροισμα δίδει την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε την i-γραμμή του A στη j-γραμμή του A. Αλλά αυτός ο πίνακας έχει δύο γραμμές ίσες, και

συνεπώς η ορίζουσα του είναι μηδέν.
Άρα

$$A\,(\mathrm{adj}\ A) = \begin{bmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη για το $(\mathrm{adj}\ A)\,A$ είναι ανάλογη.

□

Θεώρημα 2.14 *Εάν* $\det A \neq 0$ *τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{adj}\,A)\,.$$

Παρατήρηση. Αυτός ο τύπος για το αντίστροφο ενός $n \times n$ πίνακα έχει θεωρητικό ενδιαφέρον, αλλά δεν αποτελεί πρακτικό τρόπο υπολογισμού του αντιστρόφου, καθώς απαιτεί πολύ περισσότερες πράξεις απ' οτι η μέθοδος Gauss - Jordan.

Η λύση της εξίσωσης $Ax = b$

Θεώρημα 2.15 (Κανόνας του Cramer) *Εάν* $\det A \neq 0$*, η λύση της εξίσωσης*

$$A\,x = b$$

είναι το διάνυσμα $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots\,, x_n)$*, όπου*

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$$

και B_j *είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα* b *στη* j *στήλη του* A*.*

Απόδειξη. Εφόσον $\det A \neq 0$, ο A είναι μη ιδιόμορφος, και

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}(\mathrm{adj}\,A)\,b$$

Άρα

$$x_j = \frac{1}{\det A}\,(C_{1\,j}\,b_1 + \cdots + C_{n\,j}\,b_n) = \frac{\det B_j}{\det A}.$$

□

Παρατηρούμε οτι ο κανόνας του Cramer δεν αποτελεί πρακτικό τρόπο υπολογισμού της λύσης της εξίσωσης $Ax = b$, καθώς απαιτεί πολύ περισσότερες πράξεις απο τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss.

Παράδειγμα 2.8 Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 6 \end{array}$$

αντικαθιστούμε το διάνυσμα (0, 6) στην πρώτη στήλη του πίνακα για να υπολογίσουμε το x_1, και στη δεύτερη στήλη του πίνακα για να υπολογίσουμε το x_2:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-2} = 9, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-2} = -3\,.$$

Ο όγκος του n-διάστατου παραλληλεπίπεδου

Εάν τα n διανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ που αποτελούν τις ακμές ενός παραλληλεπιπέδου είναι ορθογώνια, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι το γινόμενο των μηκών των διανυσμάτων,

$$V = ||u_1||\,||u_2|| \cdots ||u_n||\,.$$

Υποθέτουμε οτι τα $u_1, \ldots, u_n$ είναι οι στήλες του πίνακα A. Αφού αυτά είναι ορθογώνια $u_i^T u_j = 0$ εάν $i \neq j$ και έχουμε

$$A^T A = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & \cdots & u_1^T u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^T u_1 & \cdots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ||u_1||^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ||u_n||^2 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$V^2 = ||u_1||^2 \cdots ||u_n||^2 = \det(A^T A) = (\det A)^2\,,$$

και ο όγκος είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας,

$$V = |\det A|\,.$$

Το πρόσημο της ορίζουσας εξαρτάται από τη διάταξη των διανυσμάτων $u_1, \ldots, u_n$. Λέμε οτι τα $u_1, \ldots, u_n$ αποτελούν *''δεξιόστροφο σύστημα''* εάν $\det A > 0$ και *''αριστερόστροφο σύστημα''* εάν $\det A < 0$.

Εάν τα διανύσματα δεν είναι ορθογώνια, τότε ο όγκος δεν είναι ίσος με το γινόμενο των μηκών των πλευρών. Σε δύο διαστάσεις, το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με πλευρές w_1 και w_2 είναι ίσο με το μήκος της πλευράς w_1 επί το ''ύψος''. Εάν κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα, θα δείτε οτι το ''ύψος'' είναι ακριβώς το μήκος του ορθογωνίου διανύσματος που παίρνουμε στο πρώτο βήμα της διαδικασίας Gram-Schmidt: το διάνυσμα $w_2' = w_2 - s w_1$ το οποίο είναι ορθογώνιο στο w_1. Αλλά η ορίζουσα του πίνακα με στήλες w_1 και w_2' είναι ίση με την ορίζουσα του πίνακα με στήλες w_1 και w_2. Άρα πάλι έχουμε

$$V = |\det A|$$

όπου A είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα w_1 και w_2.

Σε n διαστάσεις, ισχύει οτι όταν αφαιρέσουμε πολλαπλάσια των διανυσμάτων $w_1, \ldots, w_{k-1}$ από το διάνυσμα w_k, δεν αλλάζει ούτε ο όγκος του n-διάστατου παραλληλεπίπεδου που αντιστοιχεί σε αυτά τα διανύσματα, ούτε η ορίζουσα του πίνακα. Αφού μπορούμε, επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία να κατασκευάσουμε ορθογώνια διανύσματα $w_1', w_2', \ldots, w_n'$, για τα οποία γνωρίζουμε οτι ο όγκος είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας, έχουμε και στη γενική περίπτωση

$$V = |\det A|\,.$$

Ο τύπος για τους οδηγούς

Τώρα μπορούμε να δώσουμε ένα κριτήριο για το πότε είναι δυνατόν να ολοκληρωθεί η απαλοιφή Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών, και σε αυτήν την περίπτωση να εκφράσουμε τους οδηγούς μέσω οριζουσών. Η βασική παρατήρηση είναι οτι, εάν δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών, οι k πρώτοι οδηγοί καθορίζονται από τον $k \times k$ υποπίνακα A_k στο άνω αριστερό μέρος του πίνακα A. Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b & e \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & \frac{af-ec}{a} \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Ο πρώτος οδηγός προφανώς εξαρτάται μόνον από τον $A_1 = [a]$. Ο δεύτερος οδηγός εξαρτάται από τα στοιχεία a, b, c, d που αποτελούν τον υποπίνακα $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Μετά το πρώτο βήμα της απαλοιφής, ο υποπίνακας A_2 έχει γίνει άνω τριγωνικός, και δεν μεταβάλεται από τα επόμενα βήματα της απαλοιφής.

Γενικότερα, για ένα $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A_1 και $k \leq n$, έχουμε, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των μπλόκ,

$$\begin{aligned} A = LU \quad &= \quad \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k & F \\ 0 & G \end{bmatrix} \\ &= \quad \begin{bmatrix} L_k U_k & L_k F \\ B U_k & BF + CG \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και συνεπώς $A_k = L_k U_k$. Αλλά L_k είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, συνεπώς $\det L_k = 1$, ενώ U_k είναι άνω τριγωνικός με τους k πρώτους οδηγούς $d_1, \ldots, d_k$ στη διαγώνιο. Άρα

$$\det A_k = \det U_k = d_1 \ldots d_k.$$

Αφού $\det A_{k-1} = d_1 \dots d_{k-1}$, μπορούμε να εκφράσουμε τον οδηγό d_k ως το πηλίκο

$$d_k = \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}}.$$

Συμβατικά, θέτουμε $\det A_0 = 1$, έτσι ώστε αυτός ο τύπος να ισχύει και για $k = 1$. Καταγράφουμε αυτό το αποτέλεσμα στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.16 *Η απαλοιφή Gauss σε έναν τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A ολοκληρώνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών εάν και μόνον εάν όλοι οι άνω αριστερά τετραγωνικοί υποπίνακες $A_1, \dots, A_n$ είναι μή ιδιόμορφοι. Τότε οι οδηγοί $d_1, \dots, d_n$ δίδονται από τα πηλίκα*

$$d_k = \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}}.$$

2.9 Ασκήσεις

Άσκηση 2.40 Βρείτε τους συμπαράγοντες και την ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Σχηματίστε τον ανάστροφο του πίνακα συμπαραγόντων C, και επαληθεύστε οτι $AC^T = (\det A)I$.

Άσκηση 2.41 Υπολογίστε τους συμπαράγοντες C_{11}, C_{21}, C_{23} και C_{33} του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.42 Υπολογίστε τους συμπαράγοντες C_{12}, C_{24}, C_{33} και C_{43} του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.43

α΄. Σχεδιάστε το τρίγωνο με κορυφές $A = (2, 2)$, $B = (-1, 3)$ και $C = (0, 0)$. Θεωρήστε το ως το μισό ενός παραλληλογράμμου, και εξηγήστε γιατί το εμβαδόν του είναι

$$\text{εμβαδόν}(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

β΄. Τώρα θεωρήστε το τρίγωνο με κορυφές A, B και $D = (1, -4)$, και εξηγήστε γιατί το εμβαδόν του είναι

$$\text{εμβαδόν}(ABD) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Αφαιρέστε μία γραμμή από τις άλλες δύο).

Άσκηση 2.44 Χρησιμοποιήστε ορίζουσες για να υπολογίσετε τους οδηγούς των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής για να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα σας.

Άσκηση 2.45 Χρησιμοποιήστε τον κανόνα Cramer για να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & 1 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array} \qquad \text{και} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

Άσκηση 2.46 Θεωρήστε τον πίνακα M που προκύπτει όταν ένα διάνυσμα $x = (x_1, \ldots, x_n)$ αντικαθιστά τη στήλη j του ταυτοτικού πίνακα.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & x_j & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}$$

α΄. Βρείτε την ορίζουσα του M.

β΄. Εάν $Ax = b$, δείξτε οτι AM είναι ο πίνακας B_j της εξίσωσης,

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}\,, \text{ όπου } B_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & a_{nn} \end{bmatrix},$$

και η δεξιά πλευρά b εμφανίζεται στην j-οστή στήλη.

γ΄. Συμπεράνετε τον κανόνα του Cramer, παίρνοντας ορίζουσες στην $AM = B_j$.

Άσκηση 2.47 Εξηγήστε γιατί εάν όλοι οι συμπαράγοντες είναι 0, ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Εάν όλοι οι συμπαράγοντες είναι διαφορετικοί από το 0, είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος;

Άσκηση 2.48 Εάν οι στήλες ενός 4×4 πίνακα έχουν μήκος ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 και ℓ_4, ποιά είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή για την ορίζουσα του πίνακα. Εάν όλα τα στοιχεία του πίνακα είναι 1 ή -1, ποιά είναι η μεγαλύτερη τιμή της ορίζουσας.

Άσκηση 2.49 Ο πίνακας B_n είναι ίσος με τον -1, 2, -1 τριδιαγώνιο πίνακα A_n (δες Παράδειγμα 2.6) με τη διαφορά οτι στη θέση $(1, 1)$ έχει $b_{11} = 1$ αντί για $a_{11} = 2$. Χρησιμοποιήστε συμπαράγοντες ως προς την τελευταία γραμμή, για να δείξετε οτι

$$|B_4| = 2|B_3| - |B_2| = 1\,.$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η αναδρομική σχέση $|B_n| = 2|B_{n-1}| - |B_{n-2}|$ είναι ίδια με αυτή των A_n. Αλλάζουν όμως οι αρχικές τιμές. Μπορείτε να βρείτε τους οδηγούς του πίνακα B_n;