

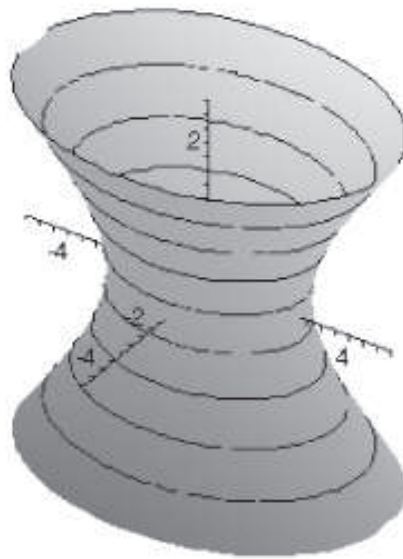
Διάλεξη 23

Μονόχωνο υπερβολοειδές

Μονόχωνο υπερβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία, σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$

Το μονόχωνο υπερβολοειδές είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα (x, y) , (x, z) και (y, z) , καθώς και ως προς τους άξονες x , y , z και το σημείο αναφοράς, (Σχήμα 5.12).



Σχήμα 5.12: Μονόχωνο υπερβολοειδές.

Το επίπεδο (x, y) τέμνει την επιφάνεια στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$

Το επίπεδο (x, z) τέμνει την επιφάνεια στην υπερβολή

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0,$$

ενώ το επίπεδο (y, z) στην υπερβολή

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0.$$

Γενικότερα, κάθε επίπεδο με εξίσωση $z = k$, τέμνει την επιφάνεια σε μία έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}, \quad z = k.$$

Κάθε επίπεδο με εξίσωση $x = m$, τέμνει την επιφάνεια σε μία υπερβολή εάν $|m| \neq a$, η οποία έχει εξισώσεις

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2}{a^2}, \quad x = m.$$

Όταν $|m| = a$, $1 - \frac{m^2}{a^2} = 0$ και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{y}{b} = \pm \frac{z}{c}, \quad x = m,$$

η οποία παριστάνει δύο ευθείες που τέμνονται στο $(m, 0, 0)$.

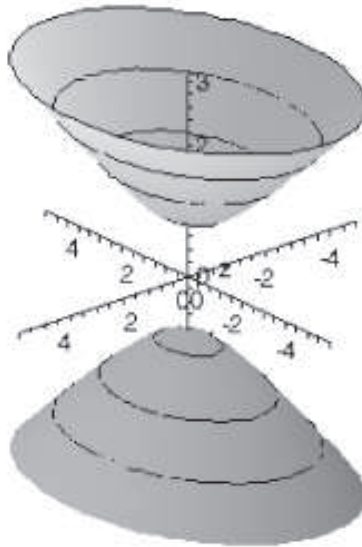
Στην ειδική περίπτωση που $a = b$, έχουμε το μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής.

Δίχωνο υπερβολοειδές

Δίχωνο υπερβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία, σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a, b, c > 0.$$

Το δίχωνο υπερβολοειδές είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα (x, y) , (x, z) και (y, z) , καθώς και ως προς τους άξονες x , y , z και το σημείο αναφοράς, (Σχήμα 5.13).



Σχήμα 5.13: Δίχωνο υπερβολοειδές.

Το επίπεδο (x, y) δεν τέμνει την επιφάνεια. Ένα επίπεδο με εξίσωση $z = k$ τέμνει την επιφάνεια σε μία έλλειψη εάν $|k| > c$, και σε ένα σημείο εάν $|k| = c$.

Τα επίπεδα (x, z) και (y, z) , καθώς και επίπεδα παράλληλα προς αυτά, τέμνουν την επιφάνεια σε μία υπερβολή.

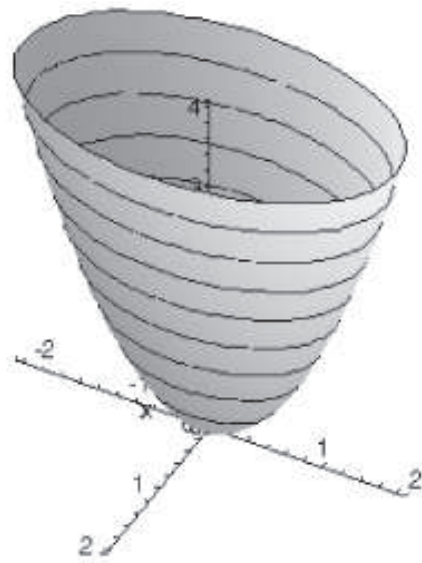
Στην ειδική περίπτωση που $a = b$ έχουμε το δίχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής.

Ελλειπτικό παραβολοειδές

Ελλειπτικό παραβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία, σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz, \quad a, b > 0, c \neq 0.$$

Το ελλειπτικό παραβολοειδές είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα (x, z) και (y, z) , καθώς και ως προς τον z -άξονα, (Σχήμα 5.14).



Σχήμα 5.14: Ελλειπτικό παραβολοειδές.

Το επίπεδο (x, y) συναντάει την επιφάνεια μόνο στο σημείο αναφοράς. Κάθε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο (x, y) με εξίσωση $z = k$, για $k > 0$ τέμνει την επιφάνεια σε μία έλλειψη με εξισώσεις

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2ck, \quad z = k.$$

Εάν $k < 0$, το επίπεδο $z = k$ δεν τέμνει την επιφάνεια.

Επίπεδα παράλληλα προς το (x, z) ή το (y, z) επίπεδο, τέμνουν την επιφάνεια σε μία παραβολή. Για παράδειγμα, το επίπεδο (x, z) τέμνει την επιφάνεια στην παραβολή

$$x^2 = 2a^2cz, \quad y = 0,$$

ενώ το επίπεδο $y = m$ τέμνει την επιφάνεια στην παραβολή

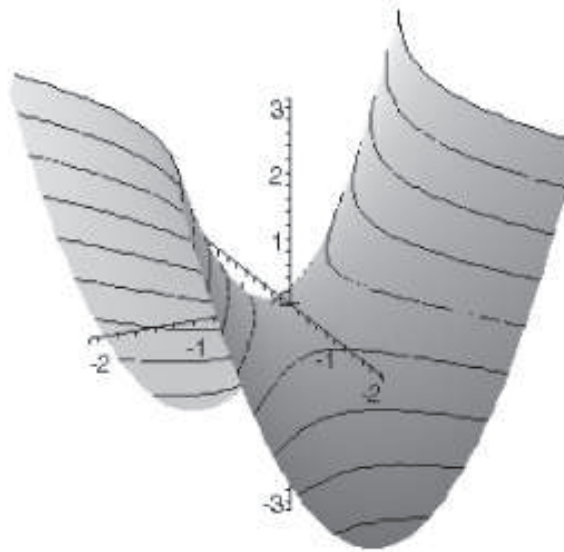
$$\frac{x^2}{a^2} = 2cz - \frac{m^2}{b^2}, \quad y = m.$$

Υπερβολικό παραβολοειδές

Υπερβολικό παραβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία, σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2cz, \quad a, b > 0, c \neq 0.$$

Η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τα επίπεδα (x, z) και (y, z) , καθώς και ως προς τον z -άξονα, και συναντάει τους άξονες μόνο στο σημείο αναφοράς, (Σχήμα 5.15).



Σχήμα 5.15: Υπερβολικό παραβολοειδές.

Το επίπεδο $z = 0$ τέμνει την επιφάνεια κατά μήκος δύο τεμνομένων ευθειών, με εξισώσεις

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad z = 0,$$

ενώ κάθε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο $z = 0$, με εξίσωση $z = k$ για $k \neq 0$, συναντάει το υπερβολικό παραβολοειδές σε μία υπερβολή, με εξισώσεις

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2ck, \quad z = k.$$

Επίπεδα παράλληλα προς το επίπεδο $x = 0$ ή το $y = 0$, τέμνουν την επιφάνεια σε μία παραβολή. Για παράδειγμα, το επίπεδο $x = m$ για $m \neq 0$, τέμνει την επιφάνεια στην παραβολή με εξισώσεις

$$\frac{y^2}{b^2} = -2cz + \frac{m^2}{a^2}, \quad x = m.$$

Άλλες επιφάνειες 2ου βαθμού

Εκτός από τα πέντε είδη επιφανειών 2ου βαθμού που περιγράψαμε, υπάρχουν ‘εκφυλισμένες’ περιπτώσεις, όπου έχουμε μία κωνική ή κυλινδρική επιφάνεια, επίπεδα, ευθεία ή το κενό σύνολο. Παρακάτω δίδουμε χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτών των περιπτώσεων.

$$\text{ελλειπτικός κώνος} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\text{παραβολικός κύλινδρος} \quad y^2 = 2cz, \quad c \neq 0$$

$$\text{υπερβολικός κύλινδρος} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{ελλειπτικός κύλινδρος} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{δύο τέμνομενα επίπεδα} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\text{δύο παράλληλα επίπεδα} \quad \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{ένα επίπεδο} \quad z^2 = 0$$

$$\text{μία ευθεία} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\text{ένα σημείο} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\text{το κενό σύνολο} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Παράδειγμα 5.10 Για να βρούμε την επιφάνεια που παριστάνει η εξίσωση

$$x^2 - y^2 - z^2 + 4x - 8y + 2z - 17 = 0$$

συμπληρώνουμε τα τετράγωνα, και έχουμε

$$(x+2)^2 - 4 - (y+4)^2 + 16 - (z-1)^2 + 1 - 17 = 0$$

ή

$$(x+2)^2 - (y+4)^2 - (z-1)^2 = 4.$$

Εάν μεταφέρουμε το σημείο αναφοράς στο $(-2, -4, 1)$, η εξίσωση γίνεται

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{4} = 1.$$

Συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση παριστάνει ένα δίκλινο υπερβολοειδές εκ περιστροφής, με κέντρο στο σημείο $(-2, -4, 1)$, και κύριο άξονα παράλληλο προς τον x -άξονα. Η επιφάνεια τέμνει τον κύριο άξονα στα σημεία $(0, -4, 1)$ και $(-4, -4, 1)$.

Άσκηση 10.1 Για τις ακόλουθες εξισώσεις,

α'. ονομάστε την επιφάνεια την οποία παριστάνουν

β'. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα (x, y) , (x, z) , (y, z) .

γ'. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα $x = 4$, $y = 4$ και $z = 4$.

i. $9x^2 + 4z^2 = 36y$

ii. $4y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$

iii. $9x^2 - y^2 = 4z$

iv. $2y^2 + 4z^2 = x^2$

v. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

vi. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$

vii. $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

viii. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$.

Άσκηση 10.2 Φέρετε τις ακόλουθες εξισώσεις σε κανονική μορφή συμπληρώνοντας τα τετράγωνα, και ονομάστε τις επιφάνειες που παριστάνουν:

α'. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8 = 0$

β'. $2x^2 + y^2 - 4z^2 + 4z - 6y - 2 = 0$

γ'. $y^2 - x^2 - 4z^2 = 2x + 8z$

δ'. $x^2 - 4y^2 + 2x - z + 8y - 3 = 0$

ε'. $x^2 + z^2 + 2x + \frac{3}{2}y + 2z - 3 = 0$

ς'. $x^2 + z^2 - 4x - y - 5 = 0$

ζ'. $x^2 - z^2 - y^2 - 4x + 4z - 1 = 0$