

Διάλεξη 22

Επιφάνειες στο χώρο μπορούν να περιγραφούν με πολλούς τρόπους. Η μελέτη τους αποτελεί αντικείμενο της Διαφορικής Γεωμετρίας. Σε αυτό το μάθημα θα δούμε ορισμένα παραδείγματα.

Επιφάνειες εκ περιστροφής

Μία επιφάνεια ονομάζεται **επιφάνεια εκ περιστροφής** εάν μπορεί να παραχθεί από την περιστροφή μίας καμπύλης γύρω από έναν άξονα. Κατά την περιστροφή, κάθε σημείο της καμπύλης διαγράφει ένα κύκλο με κέντρο στον άξονα, ο οποίος βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα. Η καμπύλη ονομάζεται **γενέτειρα** της επιφάνειας.

Παράδειγμα 5.5 Εάν η γενέτειρα είναι μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα, η επιφάνεια είναι (ορθός κυκλικός) **κύλινδρος**. Εάν θεωρήσουμε ως άξονα τον z -άξονα, τότε η επιφάνεια αποτελείται από τα σημεία (x, y, z) του χώρου που ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Παρατηρούμε ότι η απουσία του z στην εξίσωση, σημαίνει ότι αυτή η συντεταγμένη μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.6 Εάν η γενέτειρα είναι ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα, η επιφάνεια είναι (ορθός κυκλικός) **κώνος**. Εάν θεωρήσουμε ως άξονα τον z -άξονα, και ως γενέτειρα την ευθεία $z = \lambda x, y = 0$, τότε η επιφάνεια αποτελείται από τα σημεία του χώρου που ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{\lambda^2}.$$

Κάπως πιο γενικά, εάν ο άξονας περιστροφής είναι ο z -άξονας και η γενέτειρα βρίσκεται στο (x, z) -επίπεδο, με εξίσωση

$$f(x, z) = 0, \quad y = 0, \quad x \geq 0,$$

τότε η επιφάνεια εκ περιστροφής αποτελείται από τα σημεία $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (5.8)$$

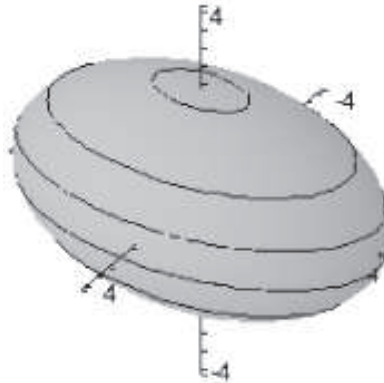
Πράγματι, εάν το σημείο $(x_0, 0, z_0)$ βρίσκεται πάνω στη γενέτειρα, τότε από την περιστροφή, βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια όλα τα σημεία στο επίπεδο $z = z_0$, τα οποία απέχουν απόσταση x_0 από τον z -άξονα, δηλαδή όλα τα σημεία με συντεταγμένες (x, y, z_0) τέτοιες ώστε $\sqrt{x^2 + y^2} = x_0$.

Παράδειγμα 5.7 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής (ή σφαιροειδές) καλείται η επιφάνεια που παράγεται από την έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

όταν περιστραφεί γύρω από έναν από τους άξονες της, (Σχήμα 5.8). Εάν η περιστροφή είναι γύρω από τον x -άξονα, η επιφάνεια, σύμφωνα με την 5.8, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$



Σχήμα 5.8: Ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

Παράδειγμα 5.8 Σπείρα (ή **τόρος**) καλείται η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου γύρω από έναν άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο του κύκλου και δεν τέμνει τον κύκλο, (Σχήμα 5.9). Θεωρούμε ως άξονα τον z -άξονα και ως γενέτειρα τον κύκλο

$$(x - a)^2 + z^2 = r^2, \quad y = 0, \quad a > r > 0.$$

Τότε η εξίσωση της σπείρας είναι

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = r^2$$

Παράδειγμα 5.9 Η επιφάνεια με εξίσωση

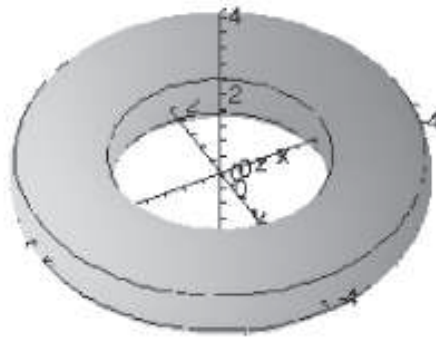
$$x^2 + y^2 - 2pz = 0$$

είναι επιφάνεια εκ περιστροφής, γιατί έχει εξίσωση της μορφής $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$. Συμπεραίνουμε ότι μπορεί να προκύψει με περιστροφή της καμπύλης $x^2 = 2pz$, $y = 0$ γύρω από τον z -άξονα. Αυτή η επιφάνεια καλείται παραβολοειδές εκ περιστροφής, (Σχήμα 5.10).

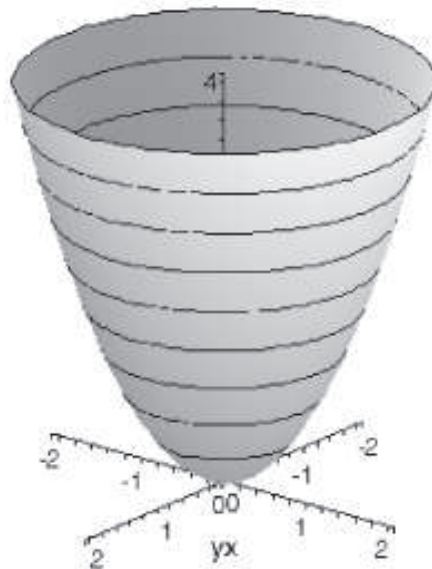
Επιφάνειες δευτέρου βαθμού

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ορισμένες γενικότερες επιφάνειες οι οποίες περιγράφονται από εξίσωση δεύτερου βαθμού ως προς x , y και z . Η γενική μορφή αυτής της εξίσωσης είναι

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + 2A_{41}x + 2A_{42}y + 2A_{43}z + A_{44} = 0.$$



Σχήμα 5.9: Σπείρα.



Σχήμα 5.10: Παραβολοειδές εκ περιστροφής.

Σε κάθε περίπτωση θα θεωρήσουμε το σύστημα αναφοράς που εκμεταλλεύεται τις συμμετρίες της επιφάνειας, ώστε να λάβουμε την απλούστερη μορφή της εξίσωσης.

Ελλειψοειδές

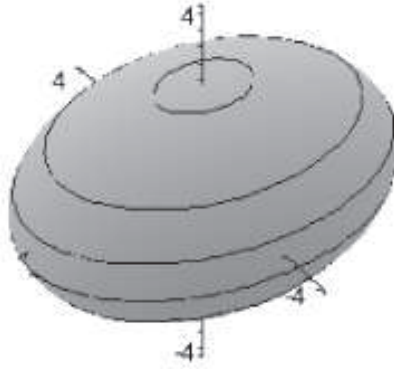
Ελλειψοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία, σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$

Εάν $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, παρατηρούμε ότι

$$f(x, y, z) = f(-x, y, z) = f(x, -y, z) = f(x, y, -z)$$

και επομένως το ελλειψοειδές είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα (y, z) , (x, z) και (x, y) . Συνεπώς είναι επίσης συμμετρικό ως προς τους τρεις άξονες συντεταγμένων, και ως προς το σημείο αναφοράς, (Σχήμα 5.11).



Σχήμα 5.11: Ελλειψοειδές.

Το ελλειψοειδές περιέχεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με πλευρές $2a$, $2b$, $2c$, και τέμνει τους άξονες στα σημεία $A : (a, 0, 0)$, $A' : (-a, 0, 0)$, $B : (0, b, 0)$, $B' : (0, -b, 0)$, $C : (0, 0, c)$, $C' : (0, 0, -c)$.

Το ελλειψοειδές τέμνει το (x, y) -επίπεδο στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$

Ένα επίπεδο παράλληλο προς το (x, y) -επίπεδο, με εξίσωση $z = k$ για $-c \leq k \leq c$, τέμνει το ελλειψοειδές στο σύνολο

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}, \quad z = k,$$

το οποίο είναι ένα σημείο όταν $|k| = c$, ενώ όταν $|k| < c$ είναι μία έλλειψη, με ημιάξονες

$$a\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}.$$

Παρόμοια ισχύουν για τις τομές του ελλειψοειδούς με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα (x, z) και (y, z) .

Γενικότερα, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε επίπεδο, εφόσον τέμνει το ελλειψοειδές, το τέμνει σε ένα σημείο ή σε μία έλλειψη. Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής είναι η ειδική περίπτωση ελλειψοειδούς όταν δύο από τις σταθερές a , b , c είναι ίσες.