

## Διάλεξη 21

### Η σφαίρα

Η επιφάνεια της σφαίρας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου  $E^3$  που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο  $K : (a, b, c)$ .

Το γενικό σημείο  $X : (x, y, z)$  της σφαίρας ικανοποιεί την εξίσωση

$$|KX| = r$$

ή

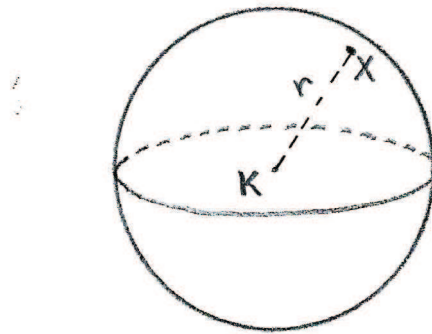
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0. \quad (5.1)$$

Όταν αναπτύζουμε τα τετράγωνα έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0.$$

Θέτουμε  $A = -2a$ ,  $B = -2b$ ,  $C = -2c$  και  $D = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$  και έχουμε εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0. \quad (5.2)$$



Σχήμα 5.1: Η σφαίρα με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $r$ .

Θα δείξουμε ότι, αντίστροφα, κάθε εξίσωση αυτής της μορφής παριστάνει σφαίρα εάν

$$4D < A^2 + B^2 + C^2.$$

Πράγματι,  $r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - D$ , το οποίο είναι θετικό  $D < a^2 + b^2 + c^2$ , δηλαδή  $4D < A^2 + B^2 + C^2$ .

Εάν  $X_1, X_2, X_3, X_4$  είναι τέσσερα σημεία με συντεταγμένες  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , αυτά βρίσκονται σε μία σφαίρα με συντελεστές  $A, B, C, D$  εάν

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$\begin{aligned}x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0 \\x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0 \\x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D &= 0,\end{aligned}$$

και το γενικό σημείο  $X : (x, y, z)$  αυτής της σφαίρας ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0.$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα των 5 εξισώσεων, το οποίο έχει μη μηδενικές λύσεις εάν η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3)$$

Αυτή η σχέση δίδει την εξίσωση της σφαίρας που περνάει από τα σημεία  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , εάν ο συντελεστής του  $x^2 + y^2 + z^2$  είναι διαφορετικός από το μηδέν. Αυτός ο συντελεστής είναι ο συμπαράγωγος  $C_{11}$ , ο οποίος είναι διαφορετικός από το μηδέν ακριβώς όταν τα σημεία  $X_1, X_2, X_3, X_4$  δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

### Σχετικές θέσεις σφαίρας και επιπέδου

Η τομή μίας σφαίρας και ενός επιπέδου στο  $E^3$  είναι ένας κύκλος εάν η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο της σφαίρας είναι μικρότερη από  $r$ . Έτσι το επίπεδο  $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$  τέμνει τη σφαίρα  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$  σε έναν κύκλο εάν

$$d(\Pi, K)^2 = \frac{(Aa + Bb + Cc + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2} < r^2.$$

Εάν  $d(\Pi, K) = r$ , τότε το επίπεδο έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τη σφαίρα και είναι εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας. Το σημείο επαφής  $X_0 : (x_0, y_0, z_0)$  είναι η κάθετη προβολή του  $K$  στο επίπεδο  $\Pi$ : το πρόσημο εξαρτάται από το  $D$  έτσι ώστε το  $X_0$  να ανήκει στο  $\Pi$ ,

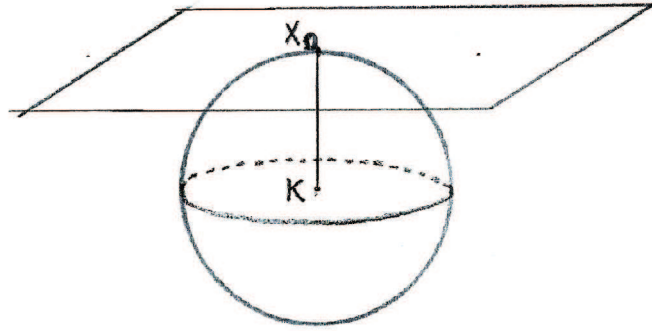
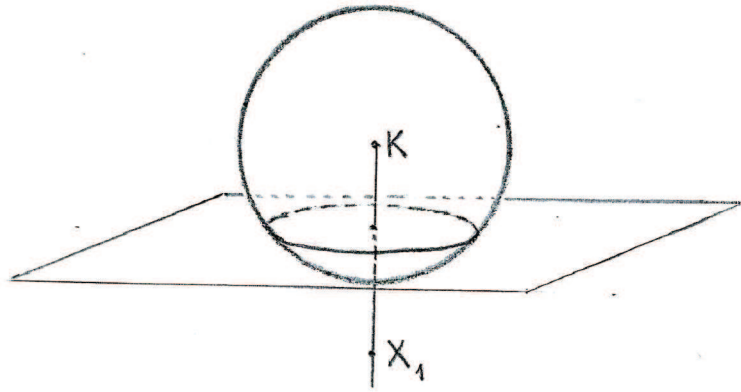
$$\overrightarrow{KX_0} = \frac{\pm r}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C).$$

Αντίστροφα, εάν  $X_0 : (x_0, y_0, z_0)$  είναι σημείο της σφαίρας, το επίπεδο που εφάπτεται στη σφαίρα στο  $X_0$  είναι κάθετο στο  $\overrightarrow{KX_0}$ , άρα το γενικό σημείο του εφαπτόμενου επιπέδου ικανοποιεί την εξίσωση

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) + (z_0 - c)(z - z_0) = 0.$$

Εάν αντικαταστήσουμε  $x - x_0 = (x - a) + (a - x_0)$ , και ανάλογα για τα  $y$  και  $z$ , έχουμε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο  $X_0$  στη μορφή

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = r^2. \quad (5.4)$$

Σχήμα 5.2: Το εφαπτόμενο επίπεδο στη σφαίρα, στο σημείο  $X_0$ .

Σχήμα 5.3: Πολικό επίπεδο ως προς σφαίρα: σημείο εκτός της σφαίρας.

Εάν  $X_1 : (x_1, y_1, z_1)$  είναι σημείο έξω από τη σφαίρα, το επίπεδο  $\Pi$  που περνάει από το  $X_1$  και εφάπτεται στη σφαίρα στο  $X_0$  θα έχει εξίσωση 5.4. Άρα τα  $X_1$  και  $X_0$  ικανοποιούν τη σχέση

$$(x_0 - a)(x_1 - a) + (y_0 - b)(y_1 - b) + (z_0 - c)(z_1 - b) = r^2.$$

Συμπεραίνουμε ότι για σταθερό σημείο  $X_1$  με  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 > r^2$ , τα επίπεδα που περνούν από το  $X_1$  και εφάπτονται στη σφαίρα έχουν σημείο επαφής με τη σφαίρα στο επίπεδο με εξίσωση

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) + (z_1 - c)(z - c) = r^2. \quad (5.5)$$

Για κάθε σημείο  $X_1$  του χώρου  $E^3$ , διαφορετικό από το κέντρο  $K$  της σφαίρας, η εξίσωση 5.5 ορίζει το **πολικό** επίπεδο του σημείου  $X_1$  ως προς τη σφαίρα 5.1. Αντίστοιχα, το σημείο  $X_1$  με συντεταγμένες

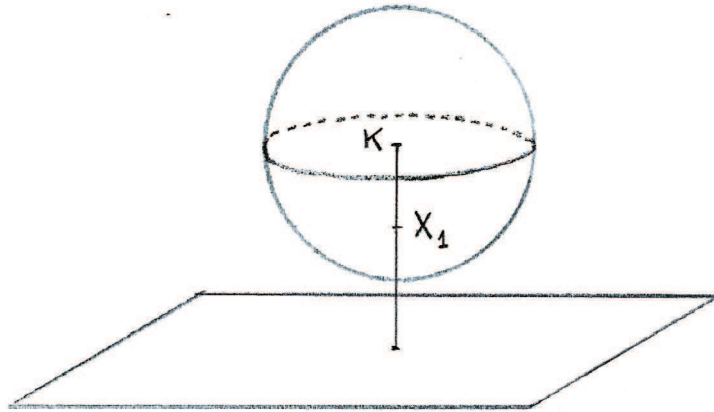
$$x_1 = a + A, \quad y_1 = b + B, \quad z_1 = c + C \quad (5.6)$$

είναι ο **πόλος** του επιπέδου με εξίσωση

$$Ax + By + Cz = r^2 + Aa + Bb + Cc, \quad (5.7)$$

ως προς τη σφαίρα 5.1.

Το πολικό επίπεδο του σημείου  $X_1$  είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\overrightarrow{KX_1}$ , και τέμνει την ευθεία  $KX_1$  στο σημείο  $X_0$  για το οποίο  $\overrightarrow{KX_1} \cdot \overrightarrow{KX_0} = r^2$ .



Σχήμα 5.4: Πολικό επίπεδο ως προς σφαίρα: σημείο εντός της σφαίρας.

**Παράδειγμα 5.1** Μία ευθεία εφάπτεται στη σφαίρα  $S$  εάν έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την  $S$ . Τότε η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας.

Θα βρούμε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρο στην ευθεία  $y = z = 0$  και εφάπτονται στην ευθεία  $\varepsilon : x = y = z$ .

Το κέντρο της σφαίρας  $S_\lambda$  είναι  $K_\lambda : (\lambda, 0, 0)$ , ενώ η ευθεία έχει παραμετρική περιγραφή  $\varepsilon : (x, y, z) = t(1, 1, 1)$ . Η ακτίνα της σφαίρας είναι η απόσταση του σημείου  $(\lambda, 0, 0)$  από την ευθεία  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} r_\lambda &= \frac{|\overrightarrow{OK_\lambda} \times (1, 1, 1)|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{|(0, -\lambda, \lambda)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\lambda \end{aligned}$$

Η εξίσωση της οικογένειας σφαιρών είναι

$$(x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}\lambda^2 = 0.$$

**Παράδειγμα 5.2** Θα βρούμε τους κύκλους που αποτελούν τομή της σφαίρας  $S : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4 = 0$  με τα επίπεδα  $\Pi_\mu : 2x + y - z = \mu$ .

Το επίπεδο  $\Pi_\mu : 2x + y - z = \mu$  τέμνει τη σφαίρα  $S$  όταν ο πόλος του  $\Pi_\mu$  βρίσκεται έξω από τη σφαίρα. Από την 5.6, όταν η εξίσωση του επιπέδου είναι στη μορφή  $Ax + By + Cz - Aa - Bb - Cc = r^2$ , όπου  $(a, b, c)$  είναι το κέντρο και  $r$  η ακτίνα της σφαίρας, ο πόλος του επιπέδου είναι το σημείο  $(a + A, b + B, c + C)$ .

Συγκρίνοντας με την 5.2, βρίσκουμε ότι το κέντρο της σφαίρας  $S$  είναι το σημείο  $K : (-2, 1, 0)$ , και η ακτίνα της είναι  $r = 3$ . Για να φέρομε την εξίσωση του επιπέδου  $\Pi_\mu$  στη μορφή 5.7 πολλαπλασιάζουμε με  $\kappa$ :

$$Ax + By + Cz = 2\kappa x + \kappa y - \kappa z = \kappa\mu,$$

και

$$r^2 + Aa + Bb + Cc = r^2 + 2\kappa(-2) + \kappa(1) - \kappa(0) = \kappa\mu.$$

Άρα  $r^2 - 3\kappa = \kappa\mu$  και  $\kappa = \frac{r^2}{\mu+3}$ .

Συμπεραίνουμε ότι ο πόλος του επιπέδου  $\Pi_\mu$  είναι το σημείο με συντεταγμένες

$$\left( \frac{2r^2}{\mu+3} - 2, \frac{r^2}{\mu+3} + 1, \frac{-r^2}{\mu+3} \right).$$

Αυτό το σημείο βρίσκεται έξω από τη σφαίρα  $S$  όταν

$$\left( \frac{2r^2}{\mu+3} \right)^2 + \left( \frac{r^2}{\mu+3} \right)^2 + \left( \frac{r^2}{\mu+3} \right)^2 > r^2,$$

που γίνεται  $6r^2 > (\mu+3)^2$ , δηλαδή όταν  $-3 - 3\sqrt{6} < \mu < -3 + 3\sqrt{6}$ . Για τιμές του  $\mu$  σε αυτό το διάστημα, το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα σε έναν κύκλο. Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο τομής του επιπέδου  $\Pi_\mu$  με την ευθεία  $(-2, 1, 0) + s(2, 1, -1)$ , το οποίο έχει συντεταγμένες  $\frac{1}{6}(2\mu - 6, \mu + 9, 3 - \mu)$ . Ο κύκλος έχει ακτίνα  $\rho$  τέτοια ώστε  $\rho^2 = 9 - \frac{(\mu+3)^2}{6}$ .

### Γεωγραφικές συντεταγμένες στη σφαίρα

Στο χώρο  $E^3$  θεωρούμε δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  και τη σφαίρα  $S$  με κέντρο στο σημείο αναφοράς, και ακτίνα  $r$ . Στο επίπεδο  $z = 0$  επιλέγουμε τον προσανατολισμό που δίδεται από τη διάταξη  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Για κάθε σημείο  $X : (x, y, z)$  της σφαίρας  $S$  διαφορετικό από τα  $(0, 0, \pm r)$ , θεωρούμε την προβολή του  $X$  στο επίπεδο  $z = 0$ ,  $X' : (x, y, 0)$ . Στο ημιεπίπεδο που περιέχει τον  $z$ -άξονα και το σημείο  $X$  επιλέγουμε τον προσανατολισμό που δίδεται από τη διάταξη  $(\overrightarrow{OX}, \vec{k})$ .

Με αυτές τις επιλογές, θεωρούμε την προσανατολισμένη γωνία

$$\vartheta = \angle(\overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OX}), \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

και την προσανατολισμένη γωνία

$$\varphi = \angle(\vec{i}, \overrightarrow{OX}), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Τότε

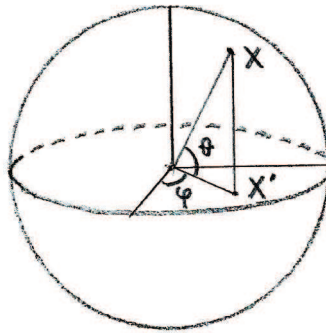
$$\begin{aligned}x &= r \cos \vartheta \cos \varphi, \\y &= r \cos \vartheta \sin \varphi, \\z &= r \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Η γωνία  $\vartheta$  είναι το (γεωγραφικό) πλάτος του σημείου  $X$ , και η γωνία  $\varphi$  το (γεωγραφικό) μήκος του σημείου  $X$ .

Η απεικόνιση  $\Psi : \{(\vartheta, \varphi) : -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \longrightarrow S$ ,

$$\Psi(\vartheta, \varphi) = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta)$$

είναι μία παραμετρική περιγραφή της σφαίρας, εκτός από τα σημεία  $(0, 0, \pm r)$ .



Σχήμα 5.5: Γεωγραφικές συντεταγμένες στη σφαίρα.

Το υποσύνολο  $\{\Psi(\vartheta, \varphi) : \vartheta = \vartheta_0\}$  για σταθερό  $\vartheta_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , είναι ένας κύκλος, που ονομάζεται **παράλληλος** της σφαίρας  $S$ , για γεωγραφικό πλάτος  $\vartheta_0$ . Ο παράλληλος για γεωγραφικό πλάτος 0 ονομάζεται **ισημερινός** της σφαίρας  $S$ .

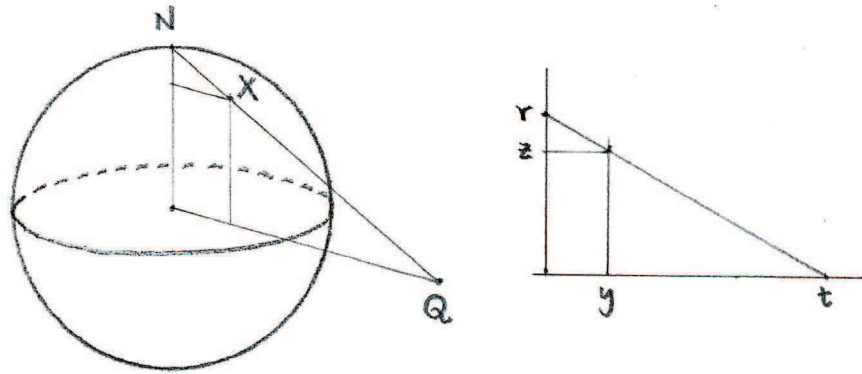
Το υποσύνολο  $\{\Psi(\vartheta, \varphi) : \varphi = \varphi_0\}$  για σταθερό  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ , είναι ένα ημικύκλιο, που ονομάζεται **μεσημβρινός** της σφαίρας  $S$ , για γεωγραφικό μήκος  $\varphi_0$ .

### Στερεογραφική παραμέτρηση της σφαίρας

Στο χώρο  $E^3$  θεωρούμε δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  και τη σφαίρα  $S$  με κέντρο στο σημείο αναφοράς, και ακτίνα  $r$ . Θεωρούμε το σημείο  $N : (0, 0, r)$ . Για κάθε σημείο  $X : (x, y, z)$  της σφαίρας, διαφορετικό από το  $N$ , η ευθεία  $NX$  τέμνει το επίπεδο  $z = 0$  σε ένα σημείο  $Q : (s, t, 0)$  και από το τρίγωνο  $NOQ$  βρίσκουμε

$$s = \frac{rx}{r-z}, \quad t = \frac{ry}{r-z}.$$

Αντίστροφα, για κάθε σημείο  $Q : (s, t, 0)$  του επιπέδου  $z = 0$ , η ευθεία  $NQ$  τέμνει τη σφαίρα  $S$  σε ένα σημείο  $X$  διαφορετικό από το  $N$ . Για τις συντεταγμένες  $(x, y, z)$  αυτού του



Σχήμα 5.6: Στερεογραφική παραμέτρηση της σφαίρας.

σημείου έχουμε

$$\begin{aligned}x &= \frac{s(r-z)}{r}, \\y &= \frac{t(r-z)}{r}, \\r^2 &= x^2 + y^2 + z^2.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο πρώτες σχέσεις στην τρίτη έχουμε  $s^2(r-z)^2 + t^2(r-z)^2 + r^2z^2 = r^4$ , απ' όπου βρίσκουμε

$$(s^2 + t^2)(r-z)^2 = r^2(r^2 - z^2),$$

και καταλήγουμε στις

$$\begin{aligned}z &= \frac{r(s^2 + t^2 - r^2)}{s^2 + t^2 + r^2}, \\x &= \frac{2sr^2}{s^2 + t^2 + r^2}, \\y &= \frac{2tr^2}{s^2 + t^2 + r^2}.\end{aligned}$$

Η απεικόνιση  $\Phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ ,

$$\Phi(s, t) = \frac{r}{s^2 + t^2 + r^2}(2rs, 2rt, s^2 + t^2 - r^2)$$

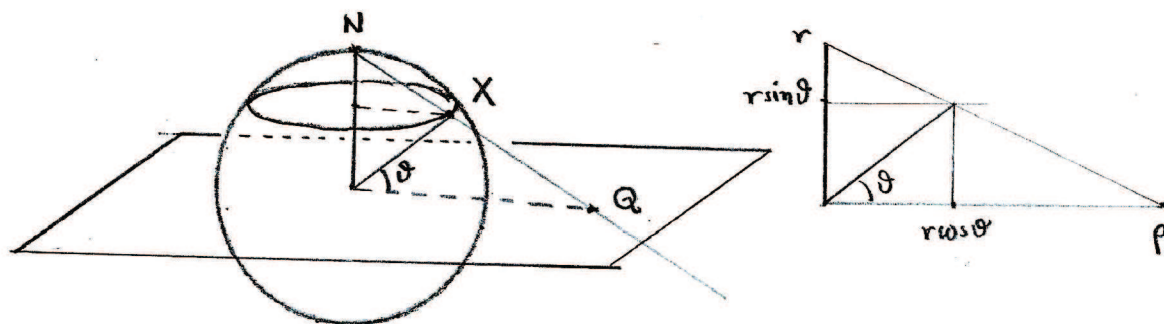
είναι μία παραμετρική περιγραφή της σφαίρας, εκτός από το σημείο  $(0, 0, r)$ .

**Παράδειγμα 5.3** Ένας παράλληλος στη σφαίρα με γεωμετρικό πλάτος  $\vartheta$  απεικονίζεται από την  $\Phi^{-1}$  στον κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ , Σχήμα 5.7, όπου

$$\frac{r \cos \vartheta}{r(1 - \sin \vartheta)} = \frac{\rho}{r}.$$

Συνεπώς ο παράλληλος αντιστοιχεί στο σύνολο με στερεογραφικές παραμέτρους  $(s, t)$  τέτοιες ώστε

$$s^2 + t^2 = r^2 \frac{1 + \sin \vartheta}{1 - \sin \vartheta}.$$



Σχήμα 5.7: Στερεογραφικές συντεταγμένες παράλληλου κύκλου.