

Διάλεξη 19

Παραβολή

Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν ίση απόσταση από ένα σταθερό σημείο και μία σταθερή ευθεία. Το σταθερό σημείο ονομάζεται **εστία** της παραβολής και η ευθεία **διευθετούσα** της παραβολής.

Εάν F είναι η εστία και δ η διευθετούσα, θεωρούμε ως σημείο αναφοράς το μέσο του κάθετου διαστήματος από το F στην δ , και θέτουμε $\vec{i} = \frac{\vec{OF}}{|\vec{OF}|}$.

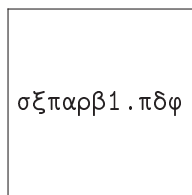
Τότε το σημείο F έχει συντεταγμένες $(\frac{p}{2}, 0)$, και η ευθεία δ εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

Εάν $X : (x, y)$ είναι ένα σημείο της παραβολής, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} &= x + \frac{p}{2} \\ \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

απ' όπου παίρνουμε την εξίσωση της παραβολής

$$y^2 = 2px \quad (4.29)$$



Σχήμα 4.26: Η παραβολή.

Η παραβολή είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y = 0$, αλλά δεν έχει κέντρο συμμετρίας.

Ορισμός 4.9. Μία ευθεία είναι **εφαπτομένη** μίας παραβολής εάν έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την παραβολή και δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής.

Το γενικό σημείο της ευθείας που περνάει από τα σημεία $X_1 : (x_1, y_1)$ και $X_2 : (x_2, y_2)$ έχει συντεταγμένες

$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \quad y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t}, \quad t \neq -1.$$

Η ευθεία X_1X_2 τέμνει την παραβολή στα σημεία για τα οποία η παράμετρος t ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{(y_1 + ty_2)^2}{(1+t)^2} = 2p \frac{x_1 + tx_2}{1+t},$$

ή

$$(y_2^2 - 2px_2)t^2 + 2(y_1y_2 - p(x_1 + x_2))t + y_1^2 - 2px_1 = 0. \quad (4.30)$$

Θέτουμε

$$L = y_2^2 - 2px_2, \quad M = y_1y_2 - p(x_1 + x_2), \quad N = y_1^2 - 2px_1.$$

Η εξίσωση 4.30 έχει μοναδική ρίζα όταν

$$M^2 - LN = 0 \quad (4.31)$$

Αυτή είναι αναγκαία συνθήκη για να είναι η ευθεία X_1X_2 εφαπτομένη της παραβολής.

Όταν το X_1 βρίσκεται στην παραβολή, η συνθήκη γίνεται

$$M = 0$$

και η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο X_1 είναι

$$y_1y = p(x_1 + x), \quad \text{όπου } y_1^2 = 2px_1.$$

Όταν X_1 βρίσκεται στο κοίλο μέρος της παραβολής, $y_1^2 > 2px_1$, η συνθήκη 4.31 γίνεται

$$(y_1y - p(x_1 + x))^2 - (y_1^2 - 2px_1)(y^2 - 2px) = 0$$

και παριστάνει δύο ευθείες, εφαπτόμενες στην παραβολή και τεμνόμενες στο X_1 . Η ευθεία που περνάει από τα σημεία επαφής των δύο εφαπτομένων, είναι η πολική ευθεία του σημείου X_1 , και έχει εξίσωση

$$y_1y = p(x_1 + x), \quad \text{όπου } y_1^2 > 2px_1.$$

Όταν X_1 βρίσκεται στο κυρτό μέρος της παραβολής, $y_1^2 < 2px_1$, δεν υπάρχουν εφαπτόμενες στην παραβολή από το X_1 . Η πολική ευθεία του σημείου X_1 , έχει εξίσωση

$$y_1y = p(x_1 + x), \quad \text{όπου } y_1^2 < 2px_1,$$

και αποτελείται από τα σημεία των οποίων η πολική ευθεία περνάει από το X_1 .

Θεώρημα 4.15 Η κάθετη προς την εφαπτομένη σε ένα σημείο X_0 της παραβολής διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζεται από την εστιακή ακτίνα X_0F και την ευθεία που περνάει από το X_0 και είναι παράλληλη προς τον άξονα παραβολής.

σξπαρβ2.πδφ

Σχήμα 4.27: Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής.

Απόδειξη. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο X_0 έχει εξίσωση $y_0y = p(x_0 + x)$, και επομένως ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $\vec{n} = (p, -y_0)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι οι

γωνίες $\vartheta_1 = \angle(\vec{n}, \overrightarrow{X_0F})$ και $\vartheta_2 = \angle(\vec{n}, \overrightarrow{OF})$ είναι ίσες. Έχουμε $\overrightarrow{X_0F} = (\frac{p}{2} - x_0, -y_0)$ και $\overrightarrow{OF} = (\frac{p}{2}, 0)$. Υπολογίζουμε τα συνημίτονα,

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{X_0F}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{X_0F}|} = \frac{p(\frac{p}{2} - x_0) + y_0^2}{|\vec{n}| \sqrt{(\frac{p}{2} - x_0)^2 + y_0^2}}$$

και

$$\cos \vartheta_2 = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OF}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{OF}|} = \frac{p^2/2}{|\vec{n}| p/2} = \frac{p}{|\vec{n}|}.$$

Αφού $y_0^2 = 2px_0$, $p(\frac{p}{2} - x_0) + y_0^2 = p(\frac{p}{2} + x_0)$ και $(\frac{p}{2} - x_0)^2 + y_0^2 = (\frac{p}{2} + x_0)^2$. Άρα

$$\frac{p(\frac{p}{2} - x_0) + y_0^2}{|\vec{n}| \sqrt{(\frac{p}{2} - x_0)^2 + y_0^2}} = \frac{p}{|\vec{n}|}.$$

□

Παραμετρική παράσταση παραβολής

Εάν θέσουμε $t = \frac{y}{2p}$, τότε η παραβολή 4.29 έχει την παραμετρική παράσταση

$$(x, y) = 2p(t^2, t).$$