

Διάλεξη 18

Υπερβολή

Υπερβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου με την ιδιότητα ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία είναι σταθερή.

Εάν F_1, F_2 είναι τα σταθερά σημεία, υποθέτουμε ότι το σημείο αναφοράς είναι το μέσο του διαστήματος F_1F_2 , και $\vec{i} = \frac{\vec{F_1F_2}}{|\vec{F_1F_2}|}$. Τότε τα σημεία F_1, F_2 έχουν συντεταγμένες $(-c, 0)$ και $(c, 0)$ αντίστοιχα. Αν X είναι ένα σημείο της υπερβολής και

$$||\vec{XF_1}| - |\vec{XF_2}|| = 2a$$

τότε από την τριγωνική ανισότητα $||\vec{XF_1}| - |\vec{XF_2}|| \leq |\vec{F_1F_2}|$. Εάν $c = a$, τα μόνα σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη είναι οι δύο ημιευθείες $x \geq c, y = 0$ και $x \leq -c, y = 0$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $c > a$.

Από τον ορισμό της υπερβολής έχουμε

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

απ' όπου παίρνουμε

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

που απλοποιείται σε

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

και τελικά

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Εφ' όσον $c > a$, μπορούμε να θέσουμε $b^2 = c^2 - a^2$, και να καταλήξουμε στην εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.23)$$

Αφού $\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} > 0$, όλα τα σημεία της υπερβολής ικανοποιούν τη σχέση $|x| > a$.

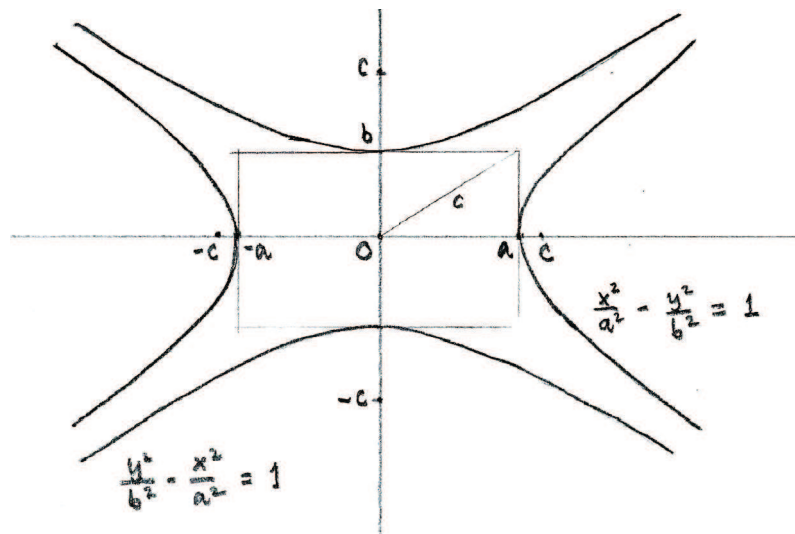
Η εξίσωση

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (4.24)$$

παριστάνει επίσης μία υπερβολή, με εστίες τα σημεία $(0, c)$ και $(0, -c)$. Οι υπερβολές 4.23 και 4.24 ονομάζονται **συζυγείς**.

Ο λόγος $e = \frac{c}{a}$ ονομάζεται **εκκεντρότητα** της υπερβολής 4.23. Η υπερβολή 4.24 έχει εκκεντρότητα $e' = \frac{c}{b}$.

Για την εκκεντρότητα της υπερβολής ισχύει $e > 1$. Θα περιγράψουμε τι συμβαίνει καθώς $e \rightarrow 1$ ή $e \rightarrow +\infty$.



Σχήμα 4.18: Οι συζυγείς υπερβολές $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ και $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Εάν θεωρήσουμε τις εστίες σταθερές και το $a \rightarrow c$, έτσι ώστε $e \rightarrow 1$, τα σημεία της υπερβολής πλησιάζουν τον x -άξονα με την ακόλουθη έννοια: για σταθερό x , καθώς $a \rightarrow c$, $y \rightarrow 0$. Λέμε ότι η υπερβολή τείνει στις ημιευθείες $|x| \geq c$, $y = 0$, αλλά όχι ομοιόμορφα.

Εάν θεωρήσουμε τις εστίες σταθερές και το $a \rightarrow 0$, έτσι ώστε $e \rightarrow \infty$, τα σημεία της υπερβολής πλησιάζουν τον y -άξονα με την ακόλουθη έννοια: για σταθερό y , καθώς $a \rightarrow 0$, $\pm x \rightarrow 0$. Λέμε ότι η υπερβολή τείνει στην ευθεία $x = 0$, αλλά όχι ομοιόμορφα.

Οι ευθείες

$$\delta_1 : x = -\frac{a^2}{c} \quad \text{και} \quad \delta_2 : x = \frac{a^2}{c}$$

ονομάζονται **διευθετούσες** της υπερβολής

Θεώρημα 4.10 Ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής από μία εστία και την αντίστοιχη διευθετούσα είναι σταθερός και ίσος προς την εκκεντρότητα της υπερβολής.

Απόδειξη. Εάν η υπερβολή έχει εξίσωση 4.23, και r_1, r_2 είναι οι αποστάσεις ενός σημείου $X : (x, y)$ από τις εστίες $(-c, 0)$ και $(c, 0)$ αντίστοιχα, Σχήμα 4.19, έχουμε $r_1^2 = (x+c)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x-c)^2 + y^2$ και από τον ορισμό της υπερβολής, $r_1 - r_2 = \pm 2a$. Άρα $\pm r_1 = \frac{cx}{a} + a$ και $\pm r_2 = \frac{cx}{a} - a$.

Η απόσταση του X από τις διευθετούσες είναι

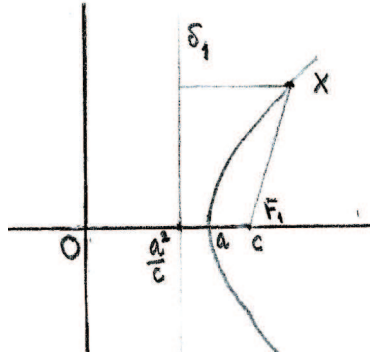
$$d_1 = d(X, \delta_1) = -\frac{a^2}{c} - x \quad \text{και} \quad d_2 = d(X, \delta_2) = \frac{a^2}{c} - x,$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a^2 + cx}{a} \frac{c}{a^2 - cx} = \frac{c}{a} = e$$

και ανάλογα για $\frac{r_2}{d_2}$.

□



Σχήμα 4.19: Διευθετούσα της υπερβολής.

Σχετικές θέσεις ευθείας και υπερβολής

Ορισμός 4.6. Μία ευθεία είναι **εφαπτομένη** της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ εάν έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την υπερβολή και η κλίση της δεν είναι ίση με $\pm \frac{b}{a}$.

Θα δούμε αργότερα γιατί χρειάζεται αυτός ο περιορισμός.

Το σημείο

$$X : (x, y) = \left(\frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \frac{y_1 + ty_2}{1+t} \right)$$

της ευθείας που περνάει από τα σημεία $X_1 : (x_1, y_1)$ και $X_2 : (x_2, y_2)$, βρίσκεται στην υπερβολή εάν το t ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{(x_1 + tx_2)^2}{a^2(1+t)^2} - \frac{(y_1 + ty_2)^2}{b^2(1+t)^2} = 1,$$

ή

$$\left(\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - 1 \right) t^2 + 2 \left(\frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1 \right) t + \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) = 0. \quad (4.25)$$

Εάν θέσουμε

$$L = \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - 1, \quad M = \frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1 \quad \text{και} \quad N = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1,$$

η εξίσωση 4.25 έχει μοναδική ρίζα όταν

$$M^2 - LN = 0 \quad (4.26)$$

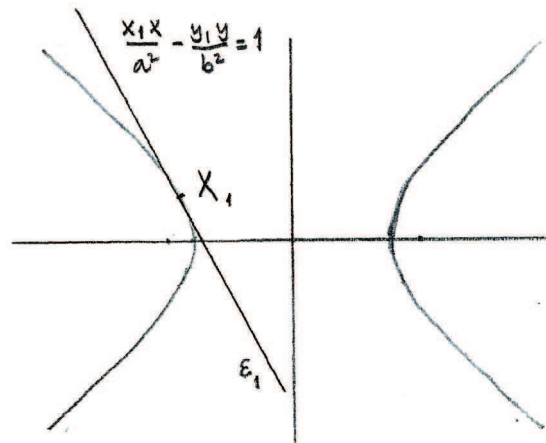
Αυτή είναι αναγκαία συνθήκη για να είναι η ευθεία $X_1 X_2$ εφαπτομένη στην υπερβολή.

Ειδικότερα, όταν X_1 βρίσκεται στην υπερβολή, Σχήμα 4.20, τότε $N = 0$, και η συνθήκη για να είναι η ευθεία $X_1 X_2$ εφαπτομένη γίνεται

$$M = 0$$

. Συμπεραίνουμε ότι το γενικό σημείο X της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο X_1 ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1, \text{ όπου } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (4.27)$$



Σχήμα 4.20: Εφαπτομένη στην υπερβολή στο σημείο X_1 .

Ορισμός 4.7. Εάν $X_1 : (x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο διαφορετικό από το O , η **πολική ευθεία** του X_1 ως προς την υπερβολή 4.23 είναι η ευθεία ε_1 με εξίσωση

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

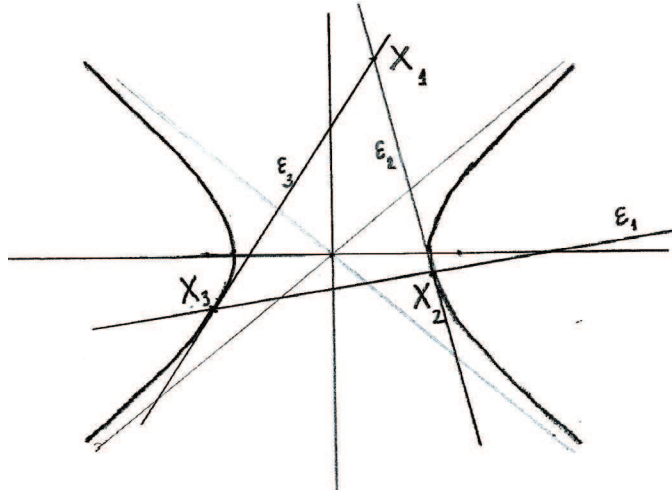
Εάν $\varepsilon_1 : Ax + By + C = 0$ είναι μία ευθεία που δεν περνάει από το O , ο **πόλος** της ε_1 ως προς την υπερβολή 4.23 είναι το σημείο

$$X_1 : \left(-\frac{Aa^2}{C}, \frac{Bb^2}{C} \right).$$

Εάν το X_1 βρίσκεται μεταξύ των δύο κλάδων της υπερβολής, δηλαδή όταν $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, το γενικό σημείο X της εφαπτομένης προς την υπερβολή από το σημείο X_1 ικανοποιεί την εξίσωση

$$\left(\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} - 1 \right)^2 - \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0 \quad (4.28)$$

η οποία παριστάνει δύο ευθείες που τέμνονται στο X_1 . Εάν $y_1 \neq \pm \frac{b}{a} x_1$, τότε οι δύο ευθείες εφάπτονται στην υπερβολή, Σχήμα 4.21. Η πολική ευθεία ε_1 του σημείου X_1 περνάει από τα σημεία στα οποία εφάπτονται οι εφαπτόμενες της υπερβολής από το σημείο X_1 .

Σχήμα 4.21: Εφαπτόμενες στην υπερβολή από το σημείο X_1 .

Εάν $X_1 = (0, 0)$, η εξίσωση 4.28 γίνεται

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

που είναι η εξίσωση δύο ευθειών $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Ορισμός 4.8. Οι ευθείες $y = \pm \frac{b}{a}x$ είναι οι **ασύμπτωτες** της υπερβολής 4.23.

Θεωρούμε ένα σημείο $P : (x, \frac{bx}{a})$ πάνω στην ευθεία $y = \frac{b}{a}x$, και το σημείο $Q : (x, \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2})$ το οποίο βρίσκεται πάνω στην υπερβολή, Σχήμα 4.22. Η απόσταση μεταξύ του σημείου στην υπερβολή και του αντίστοιχου σημείου πάνω στην ευθεία είναι

$$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{a} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Έτσι τα σημεία

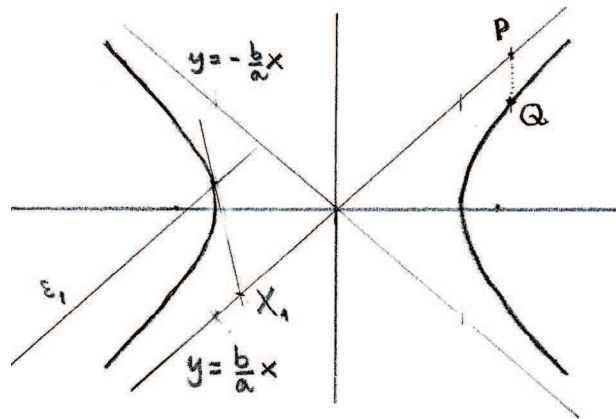
$$\left(x, \frac{bx}{a}\right) \text{ και } \left(x, -\frac{bx}{a}\right) \text{ πλησιάζουν τα } \left(x, \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) \text{ και } \left(x, -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

αντίστοιχα καθώς $x \rightarrow \infty$, ενώ τα σημεία

$$\left(x, \frac{bx}{a}\right) \text{ και } \left(x, -\frac{bx}{a}\right) \text{ πλησιάζουν τα } \left(x, -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) \text{ και } \left(x, \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

αντίστοιχα καθώς $x \rightarrow -\infty$.

Εάν X_1 βρίσκεται πάνω σε μία από τις ασύμπτωτες, $y_1 = \pm \frac{b}{a}x_1$, αλλά $x_1 \neq 0$, τότε η μία ευθεία που ικανοποιεί την εξίσωση 4.28 είναι η ασύμπτωτη και η άλλη η εφαπτομένη



Σχήμα 4.22: Ασύμπτωτες της υπερβολής.

στην υπερβολή. Η πολική ευθεία του X_1 σε αυτή την περίπτωση είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη και τέμνει την υπερβολή στο σημείο επαφής της εφαπτομένης από το X_1 , Σχήμα 4.22. Παρατηρούμε ότι ευθείες παράλληλες προς τις ασύμπτωτες τέμνουν την υπερβολή σε ένα σημείο αλλά δεν είναι εφαπτόμενες.

Πρόταση 4.11 Η κλίση λ μίας εφαπτομένης της υπερβολής 4.23 ικανοποιεί

$$|\lambda| > \frac{b}{a}.$$

Εάν το σημείο X_1 βρίσκεται μεταξύ της υπερβολής και των ασυμπτώτων, δηλαδή εάν $0 < \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$, τότε οι δύο εφαπτόμενες προς την υπερβολή από το X_1 εφάπτονται στον ίδιο κλάδο της υπερβολής.

Εάν $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0$ τότε οι δύο εφαπτόμενες προς την υπερβολή από το X_1 εφάπτονται σε διαφορετικούς κλάδους της υπερβολής.

Απόδειξη. Εάν X_1 βρίσκεται στην υπερβολή, από τις 4.23 και 4.27 έχουμε $y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{y_1 a^2} (x - x_1)$, δηλαδή $\lambda = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$. Αλλά

$$\left| \frac{x_1}{y_1} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{y_1^2} + \frac{a^2}{b^2}} > \frac{a}{b},$$

άρα $|\lambda| > \frac{b}{a}$.

Τώρα θεωρούμε X_1 το οποίο βρίσκεται μεταξύ της υπερβολής και των ασυμπτώτων, δηλαδή $0 < \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$, και υποθέτουμε ότι $x_1 > 0$. Δείχνουμε ότι εάν X_2 βρίσκεται στην υπερβολή και $x_2 < 0$, τότε

$$\left| \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right| < \frac{b}{a},$$

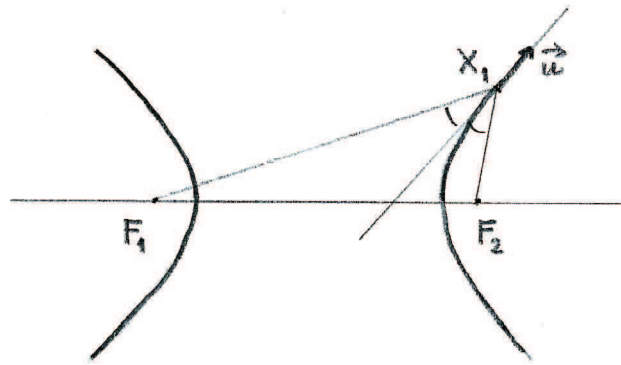
άρα μία ευθεία από το X_1 στο X_2 δεν μπορεί να είναι εφαπτομένη της υπερβολής.

□

Εάν X_1 ικανοποιεί την $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, δεν υπάρχουν εφαπτόμενες στην υπερβολή από το X_1 . Όλα τα σημεία της πολικής ευθείας $\varepsilon_1 : \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ του σημείου X_1 βρίσκονται μεταξύ των δύο κλάδων της υπερβολής, δηλαδή ικανοποιούν την $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$. Κάθε σημείο της ε_1 είναι πόλος μίας ευθείας που περνάει από το X_1 .

Γεωμετρικές ιδιότητες της υπερβολής.

Θεώρημα 4.12 Η εφαπτομένη στην υπερβολή σε ένα σημείο X_1 διχοτομεί τη γωνία $\angle(\overrightarrow{X_1 F_1}, \overrightarrow{X_1 F_2})$.



Σχήμα 4.23: Η διχοτόμος της γωνίας μεταξύ των εστιακών ακτίνων της υπερβολής.

Απόδειξη. Η εφαπτομένη 4.27 έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{u} = \left(\frac{y_1}{b^2}, \frac{x_1}{a^2}\right)$, Σχήμα 4.23. Θα δείξουμε ότι το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ του $\vec{u}$ και των $\overrightarrow{X_1 F_1} = -(x_1 + c, y_1)$, $\overrightarrow{X_1 F_2} = -(x_1 - c, y_1)$ είναι ίσο. Έχουμε

$$\frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{X_1 F_1}}{|\overrightarrow{X_1 F_1}|} = -\frac{(x_1 + c)\frac{y_1}{b^2} + \frac{x_1 y_1}{a^2}}{\frac{c}{a}x_1 + a},$$

και

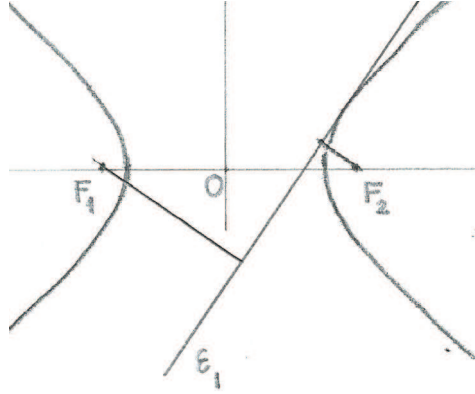
$$\frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{X_1 F_2}}{|\overrightarrow{X_1 F_2}|} = -\frac{(x_1 - c)\frac{y_1}{b^2} + \frac{x_1 y_1}{a^2}}{\frac{c}{a}x_1 - a}.$$

Δείχνουμε ότι και τα δύο είναι ίσα με $\frac{cy_1}{ab^2}$. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} (x_1 + c)\frac{y_1}{b^2} + \frac{x_1 y_1}{a^2} &= x_1 y_1 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \right) + \frac{cy_1}{b^2} \\ &= \frac{x_1 y_1 c^2}{a^2 b^2} + \frac{cy_1}{b^2} \\ &= \frac{cy_1}{ab^2} \left(\frac{c}{a}x_1 + a \right). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4.13 Το γινόμενο των προσημασμένων αποστάσεων των εστιών της υπερβολής από μία εφαπτομένη είναι σταθερό, και ίσο με $-b^2$.



Σχήμα 4.24: Οι αποστάσεις των εστιών από την εφαπτομένη υπερβολής.

Απόδειξη. θεωρούμε σημείο X_1 της υπερβολής 4.23 και την εφαπτομένη ε_1 στο X_1 , με εξίσωση 4.27, Σχήμα 4.24. Τότε

$$d(F_1, \varepsilon_1) = \frac{-\frac{x_1 c}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}},$$

και

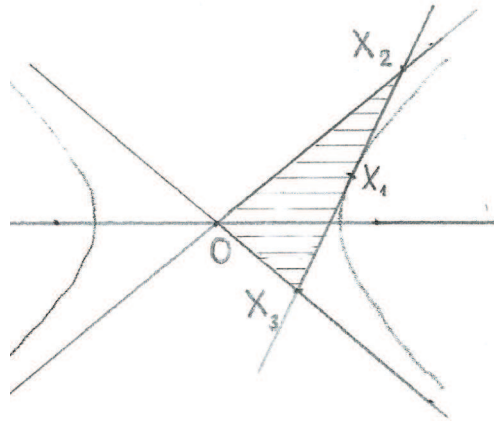
$$d(F_2, \varepsilon_1) = \frac{\frac{x_1 c}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}.$$

Υπολογίζουμε το γινόμενο και χρησιμοποιούμε την 4.23 για να βρούμε

$$\begin{aligned} d(F_1, \varepsilon_1)d(F_2, \varepsilon_1) &= \frac{1 - \frac{x_1^2 c^2}{a^4}}{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}} \\ &= \frac{a^4 b^4 - b^4 c^2 x_1^2}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \\ &= \frac{a^4 b^2 - b^2(a^2 + b^2)x_1^2}{b^4 x_1^2 + a^2 b^2 x_1^2 - a^4 b^2} b^2 = -b^2. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4.14 Το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες και μία εφαπτομένη έχει σταθερό εμβαδόν, ίσο με ab .



Σχήμα 4.25: Τρίγωνο από ασύμπτωτες και εφαπτομένη υπερβολής.

Απόδειξη. Θεωρούμε την εφαπτομένη ε_1 στο σημείο X_1 της υπερβολής, με εξίσωση 4.27, Σχήμα 4.25. Τα σημεία τομής της ε_1 με τις ασύμπτωτες $y = \pm bx/a$ είναι τα

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1}, \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} \right), \quad (x_3, y_3) = \left(\frac{a^2b}{bx_1 + ay_1}, \frac{-ab^2}{bx_1 + ay_1} \right).$$

Το τρίγωνο OX_2X_3 έχει εμβαδόν

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overrightarrow{OX_2} \times \overrightarrow{OX_3}| &= \frac{1}{2} |x_2y_3 - y_2x_3| \\ &= \frac{a^3b^3}{|b^2x_1^2 - a^2y_1^2|} = ab, \end{aligned}$$

αφού $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$ για X_1 στην υπερβολή.

□

Παραμετρική παράσταση υπερβολής

Ορίζουμε τις συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ικανοποιούν την ταυτότητα

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ με την υπερβολική τριγωνομετρική ταυτότητα $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, βλέπουμε ότι μία παραμετρική παράσταση της υπερβολής είναι η

$$(x, y) = (a \cosh s, b \sinh s), \quad s \in \mathbb{R}$$

για τον δεξιό κλάδο, όπου $x > 0$, και

$$(x, y) = (-a \cosh s, b \sinh s), \quad s \in \mathbb{R}$$

για τον αριστερό κλάδο, όπου $x < 0$.

Εάν αντικαταστήσουμε $t = e^s$, και χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες $\cosh s = \frac{1}{2}(e^s + e^{-s})$ και $\sinh s = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s})$, έχουμε μία παραμετρική παράσταση της υπερβολής με ρητές συναρτήσεις

$$(x, y) = \left(\frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$