

Διάλεξη 17

Εξισώσεις δευτέρου βαθμού στο επίπεδο

Η γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού στο επίπεδο, δηλαδή με δύο αγνώστους, μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (4.15)$$

όπου A, B, C δεν είναι και τα τρία μηδέν. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν μία εξίσωση αυτής της μορφής είναι μία **κωνική τομή**, δηλαδή μία καμπύλη που μπορεί να προκύψει ως η τομή ενός επιπέδου με έναν κώνο.

Οι κωνικές τομές περιλαμβάνουν τρία είδη καμπυλών, τις ελλείψεις, τις παραβολές και τις υπερβολές. Μία εξίσωση της μορφής 4.15 μπορεί επίσης να παριστάνει ένα σύστημα δύο ευθειών, που μπορεί να είναι παράλληλες, να τέμνονται ή να συμπίπτουν, ή ένα σημείο ή το κενό σύνολο.

Έλλειψη

Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, τα οποία ονομάζουμε εστίες της έλλειψης.

Εάν F_1, F_2 είναι οι εστίες, υποθέτουμε ότι το σημείο αναφοράς είναι το μέσο του διαστήματος F_1F_2 , και $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{|\overrightarrow{F_1F_2}|}$. Τότε οι εστίες F_1, F_2 έχουν συντεταγμένες $(-c, 0)$ και $(c, 0)$ ως προς το $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Εάν το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου X της έλλειψης από τα F_1, F_2 είναι $2a$, τότε από την τριγωνική ανισότητα $a > c$, και έχουμε

$$|\overrightarrow{F_1X}| + |\overrightarrow{F_2X}| = 2a,$$

δηλαδή $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ απ' όπου παίρνουμε

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

που απλοποιείται σε

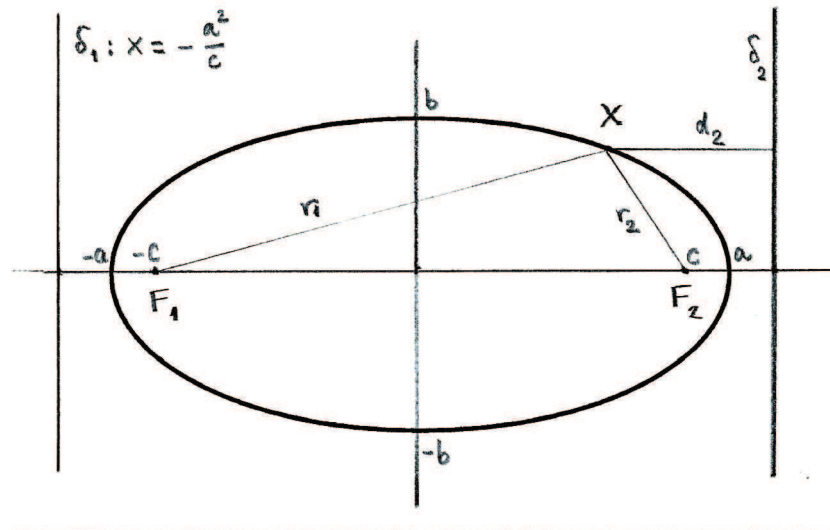
$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε $c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$, και τελικά

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Εφ' όσον $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$ και εάν θέσουμε $b^2 = a^2 - c^2$, έχουμε την εξίσωση της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.16)$$



Σχήμα 4.12: Η έλλειψη.

Ως οριακές περιπτώσεις, βλέπουμε ότι για σταθερό a , καθώς c τείνει προς το 0, οι δύο εστίες πλησιάζουν προς το κέντρο και έχουμε έναν κύκλο, $x^2 + y^2 = a^2$, ενώ καθώς c τείνει προς το a , b τείνει στο 0 και η έλλειψη εκφυλίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα F_1F_2 .

Από την 4.16 έχουμε $|x| \leq a$ και $|y| \leq b$. Άρα η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$. Παρατηρούμε επίσης ότι εάν (x, y) ανήκει στην έλλειψη, τότε το ίδιο ισχύει για τα $(-x, y)$, $(x, -y)$ και $(-x, -y)$. Δηλαδή η έλλειψη είναι συμμετρική ως προς τους άξονες $x = 0$, $y = 0$ και ως προς το σημείο αναφοράς O .

Ορισμός 4.3. Ο λόγος $e = \frac{c}{a}$ ονομάζεται **εκκεντρότητα** της έλλειψης.

Οι ευθείες

$$\delta_1 : x = -\frac{a^2}{c} \quad \text{και} \quad \delta_2 : x = \frac{a^2}{c}$$

ονομάζονται **διευθετούσες** της έλλειψης.

Θεώρημα 4.7 Ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου της ελλείψης από μία εστία και την αντίστοιχη διευθετούσα είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα.

Απόδειξη. Αν X είναι σημείο της ελλείψης και r_1, r_2 οι αποστάσεις του X από τις εστίες F_1, F_2 , έχουμε

$$r_1^2 = (x + c)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x - c)^2 + y^2.$$

Άρα $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$, άλλα $r_1 + r_2 = 2a$, άρα $r_1 - r_2 = \frac{2cx}{a}$. Δηλαδή

$$r_1 = a + \frac{cx}{a} \quad \text{και} \quad r_2 = a - \frac{cx}{a}. \quad (4.17)$$

Η απόσταση του X από τις διευθετούσες είναι

$$d_1 = d(X, \delta_1) = \frac{a^2}{c} + x \quad \text{και} \quad d_2 = d(X, \delta_2) = \frac{a^2}{c} - x,$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a^2 + cx}{a} \cdot \frac{c}{a^2 + cx} = \frac{c}{a} = e$$

και ανάλογα για $\frac{r_2}{d_2}$.

□

Σχετικές θέσεις ευθείας και έλλειψης

Ορισμός 4.4. Μία ευθεία είναι **εφαπτομένη** μίας έλλειψης εάν έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την έλλειψη.

Αν $X_1 : (x_1, y_1)$ και $X_2 : (x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου, και $X : (x, y)$ είναι σημείο της ευθείας X_1X_2 , τότε οι συντεταγμένες του X δίδονται από

$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \quad y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t},$$

όπου $t = (X_1X_2X)$ είναι ο απλός λόγος $\frac{(X_1X)}{(XX_2)}$.

Το σημείο (x, y) ανήκει στην έλλειψη εάν το t ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{(x_1 + tx_2)^2}{a^2(1+t)^2} + \frac{(y_1 + ty_2)^2}{b^2(1+t)^2} = 1,$$

ή, αφού $t \neq -1$,

$$\frac{x_1^2 + 2tx_1x_2 + t^2x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2 + 2ty_1y_2 + t^2y_2^2}{b^2} = 1 + 2t + t^2.$$

Δηλαδή η ευθεία X_1X_2 τέμνει την έλλειψη στα σημεία όπου t είναι ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1\right)t^2 + 2\left(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} - 1\right)t + \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) = 0 \quad (4.18)$$

Εάν θέσουμε

$$L = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1, \quad M = \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} - 1 \quad \text{και} \quad N = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1,$$

η εξίσωση (4.18) έχει μοναδική ρίζα ακριβώς όταν

$$M^2 - LN = 0.$$

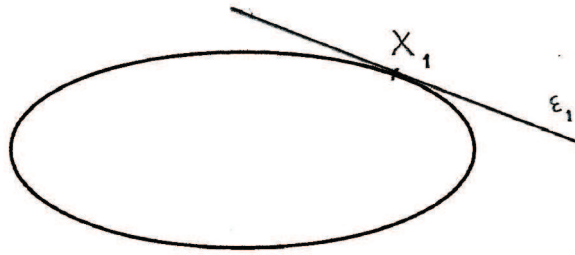
Συνεπώς αυτή είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η ευθεία X_1X_2 εφαπτομένη στην έλλειψη.

Ειδικότερα, όταν X_1 βρίσκεται στην έλλειψη, η συνθήκη γίνεται

$$M = 0$$

και συνεπώς η εξίσωση της εφαπτόμενης της έλλειψης στο σημείο X_1 είναι

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1, \text{ όπου } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (4.19)$$

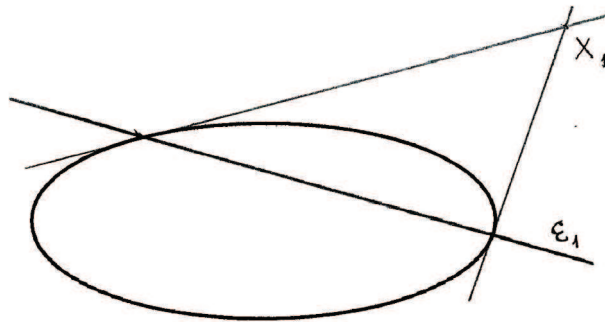


Σχήμα 4.13: Εφαπτομένη σε έλλειψη.

Εάν το X_1 βρίσκεται έξω από την έλλειψη, τότε $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, και η εξίσωση

$$\left(\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} - 1 \right)^2 - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0 \quad (4.20)$$

παριστάνει δύο ευθείες που τέμνονται στο X_1 και είναι εφαπτόμενες στην έλλειψη.



Σχήμα 4.14: Εφαπτόμενες από σημείο έξω από την έλλειψη.

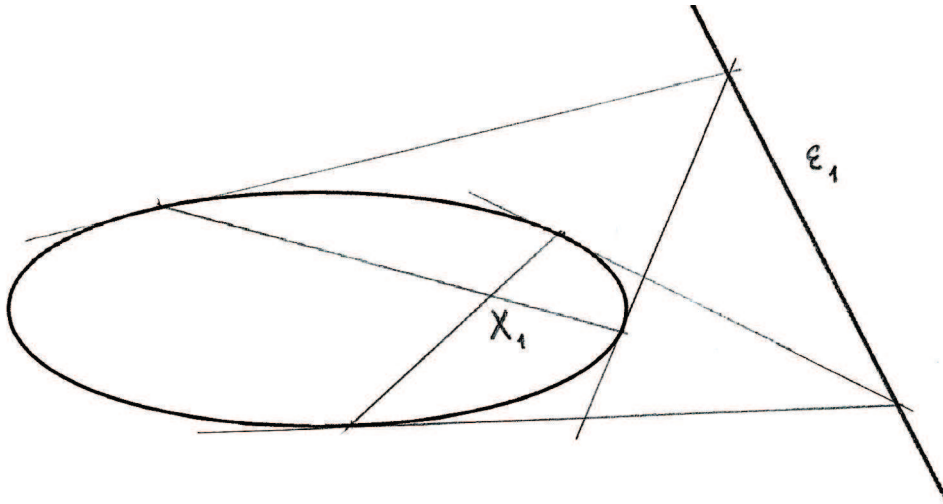
Εάν τώρα θεωρήσουμε τα σημεία στα οποία οι ευθείες 4.20 εφάπτονται στην έλλειψη, αυτά ικανοποιούν την 4.20 και την 4.16, και συνεπώς ικανοποιούν την

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1, \text{ όπου } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1. \quad (4.21)$$

Εάν τέλος θεωρήσουμε το X_1 στο εσωτερικό της έλλειψης, τότε τα σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν την

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1, \text{ όπου } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1, \quad (4.22)$$

αποτελούν μία ευθεία που βρίσκεται ολόκληρη έξω από την έλλειψη.



Σχήμα 4.15: Πολική ευθεία σημείου μέσα στην έλλειψη.

Ορισμός 4.5. Εάν $X_1 : (x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο διαφορετικό από το O , η **πολική ευθεία** του X_1 ως προς την έλλειψη 4.16 είναι η ευθεία ε_1 με εξίσωση

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1.$$

Εάν $\varepsilon_1 : Ax + By + C = 0$ είναι μία ευθεία που δεν περνάει από το O , ο **πόλος** της ε_1 ως προς την έλλειψη 4.16 είναι το σημείο

$$X_1 : \left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C} \right).$$

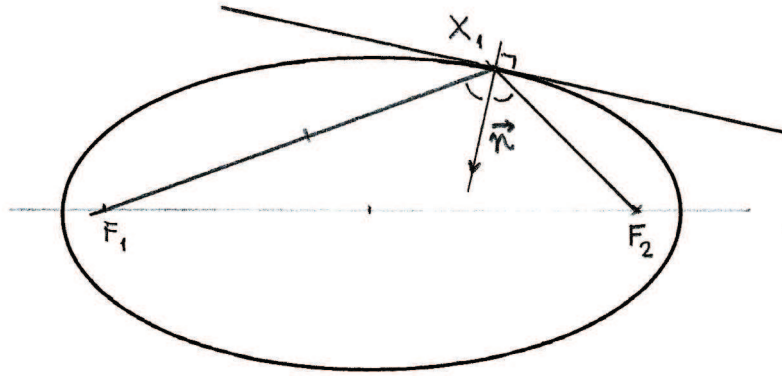
Ακριβώς όπως και στον κύκλο, για κάθε σημείο του επιπέδου $X_1 : (x_1, y_1)$, διαφορετικό από το κέντρο συμμετρίας της έλλειψης, αντιστοιχεί η **πολική ευθεία** ε_1 του σημείου X_1 ως προς την έλλειψη.

- Εάν X_1 ανήκει στην έλλειψη, η ε_1 είναι η εφαπτομένη στην έλλειψη στο σημείο X_1 ,
- Εάν X_1 βρίσκεται έξω από την έλλειψη, η ε_1 περνάει από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων από το X_1 προς την έλλειψη.

- Εάν X_1 βρίσκεται μέσα στην έλλειψη, η ευθεία ε_1 βρίσκεται ολόκληρη έξω από την έλλειψη και αποτελείται από τα σημεία των οποίων η πολική ευθεία περνάει από το X_1 .

Γεωμετρικές ιδιότητες της έλλειψης

Θεώρημα 4.8 Η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο X_1 , διχοτομεί τη γωνία $\angle(\overrightarrow{X_1F_1}, \overrightarrow{X_1F_2})$.



Σχήμα 4.16: Κάθετη ευθεία στην εφαπτομένη στην έλλειψη.

Απόδειξη. Η εφαπτομένη στο σημείο $X_1 : (x_1, y_1)$ της έλλειψης έχει εξίσωση $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$, άρα ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $\vec{n} = -(b^2x_1, a^2y_1)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι οι γωνίες $\vartheta_1 = \angle(\overrightarrow{X_1F_1}, \vec{n})$ και $\vartheta_2 = \angle(\overrightarrow{X_1F_2}, \vec{n})$ είναι ίσες. Θα υπολογίσουμε τα συνημίτονα,

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{X_1F_1}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{X_1F_1}|} \quad \text{και} \quad \cos \vartheta_2 = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{X_1F_2}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{X_1F_2}|}.$$

Έχουμε $\overrightarrow{X_1F_1} = -(x_1 + c, y_1)$ και $|\overrightarrow{X_1F_1}| = r_1 = a + \frac{cx_1}{a}$ από την 4.17. Επίσης $\overrightarrow{X_1F_2} = -(x_1 - c, y_1)$ και $|\overrightarrow{X_1F_2}| = r_2 = a - \frac{cx_1}{a}$. Συνεπώς $\vec{n} \cdot \overrightarrow{X_1F_1} = a^2b^2 + b^2x_1c$ και $\vec{n} \cdot \overrightarrow{X_1F_2} = a^2b^2 - b^2x_1c$. Άρα

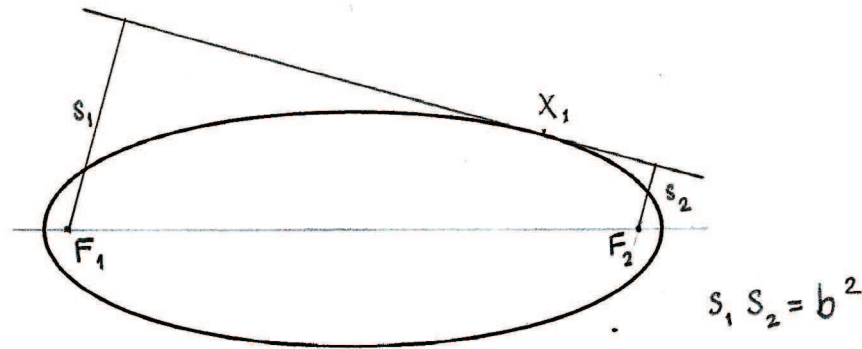
$$\cos \vartheta_1 = \frac{a(a^2b^2 + b^2x_1c)}{|\vec{n}| (a^2 + cx_1)} = \frac{ab^2}{|\vec{n}|}$$

και

$$\cos \vartheta_2 = \frac{a(a^2b^2 - b^2x_1c)}{|\vec{n}| (a^2 - cx_1)} = \frac{ab^2}{|\vec{n}|}.$$

□

Θεώρημα 4.9 Το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών από μία εφαπτομένη της έλλειψης είναι σταθερό.



Σχήμα 4.17: στην έλλειψη.

Απόδειξη. Η εφαπτομένη στο σημείο $X_1 : (x_1, y_1)$ της έλλειψης έχει εξίσωση $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2$, άρα οι αποστάσεις των εστιών $F_1 : (-c, 0)$ και $F_2 : (c, 0)$ είναι

$$d(F_1, \varepsilon_1) = \frac{|-b^2 x_1 c - a^2 b^2|}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}} \quad \text{και} \quad d(F_2, \varepsilon_1) = \frac{|+b^2 x_1 c - a^2 b^2|}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}.$$

Άρα το γινόμενο είναι

$$\begin{aligned} d(F_1, \varepsilon_1) d(F_2, \varepsilon_1) &= \frac{b^4 (a^2 + x_1 c)(a^2 - x_1 c)}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \\ &= \frac{b^4 (a^4 - x_1^2 c^2)}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \\ &= \frac{b^4 (a^4 - x_1^2 (a^2 - b^2))}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \\ &= \frac{b^2 (a^2 (b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2) - b^2 x_1^2 (a^2 - b^2))}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \\ &= b^2. \end{aligned}$$

□

Παραμετρική παράσταση έλλειψης

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι μία παραμετρική παράσταση της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ είναι η

$$(x, y) = (a \cos \vartheta, b \sin \vartheta).$$

Για όλα τα σημεία της έλλειψης εκτός από το $(-a, 0)$, έχουμε επίσης την παραμετρική παράσταση με ρητές συναρτήσεις

$$(x, y) = \left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2bt}{1+t^2} \right).$$