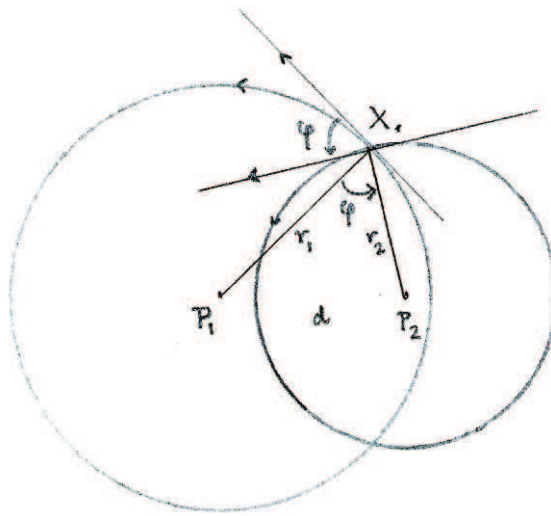


Διάλεξη 16

Γωνία τομής δύο κύκλων.

Γωνία μεταξύ δύο τεμνόμενων κύκλων ονομάζουμε τη γωνία φ μεταξύ των εφαπτομένων των κύκλων στα σημεία τομής τους, με προσανατολισμό που προκύπτει από τον προσανατολισμό των κύκλων, Σχήμα 4.6. Βλέπουμε ότι εάν οι δύο κύκλοι έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, αυτή είναι ίση με τη γωνία μεταξύ των ακτίνων στο σημείο τομής. Η γωνία είναι 0 όταν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και π όταν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



Σχήμα 4.6: Η γωνία μεταξύ δύο κύκλων.

Εάν d είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων, τότε $\cos \varphi$ δίδεται από τον κανόνα του συνημιτόνου, $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi$,

$$\cos \varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Όταν $\varphi = \pi/2$, λέμε ότι οι κύκλοι είναι ορθογώνιοι. Δύο κύκλοι είναι ορθογώνιοι εάν $d^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο.

Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι για οποιαδήποτε ευθεία από το X_1 τέμνει τον κύκλο στα σημεία X_2, X_3 , η ποσότητα $|X_1X_2| \cdot |X_1X_3|$ είναι σταθερή, και εάν το X_1 βρίσκεται έξω από τον κύκλο, είναι ίση με το τετράγωνο του μήκους της εφαπτομένης από το X_1 , $|X_1X_0|^2 = |PX_1|^2 - r^2$.

Θα γενικεύσουμε αυτό τον ορισμό, και θα ορίσουμε για κάθε σημείο $X_1 : (x_1, y_1)$ του επιπέδου, τη **δύναμη** του σημείου X_1 ως προς τον κύκλο με κέντρο P και ακτίνα r ,

$$p = (x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 - r^2. \quad (4.12)$$

Θα δείξουμε ότι εάν μία ευθεία από το X_1 τέμνει τον κύκλο στα σημεία X_2 και X_3 , η δύναμη του σημείου X_1 ως προς τον κύκλο είναι ίση με το γινόμενο των προσημασμένων μέτρων $(\overrightarrow{X_1X_2})(\overrightarrow{X_1X_3})$.

Για να απλοποιήσουμε τον υπολογισμό επιλέγουμε ως σημείο αναφοράς το κέντρο του κύκλου, ώστε $x_2^2 + y_2^2 = r^2$. Το σημείο X_3 βρίσκεται στην ευθεία X_1X_2 και στον κύκλο. Δηλαδή υπάρχει t για το οποίο $(x_3, y_3) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ και $x_3^2 + y_3^2 = r^2$. Άρα t ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} r^2 &= ((1-t)x_1 + tx_2)^2 + ((1-t)y_1 + ty_2)^2 \\ &= (1-t)^2(x_1^2 + y_1^2) + t^2(x_2^2 + y_2^2) + 2t(1-t)(x_1x_2 + y_1y_2). \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, διαιρούμε με $1-t$ και έχουμε

$$(1-t)(x_1^2 + y_1^2) - (1+t)r^2 + 2t(x_1x_2 + y_1y_2) = 0,$$

από το οποίο βρίσκουμε

$$t = \frac{x_1^2 + y_1^2 - r^2}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{p}{|\overrightarrow{X_1X_2}|^2}.$$

Άρα $\overrightarrow{X_1X_3} = \frac{p}{|\overrightarrow{X_1X_2}|^2} \overrightarrow{X_1X_2}$, και

$$p = (\overrightarrow{X_1X_2})(\overrightarrow{X_1X_3}).$$

Εάν έχουμε δύο κύκλους με εξισώσεις

$$\begin{aligned} (x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 &= r_1^2, \\ (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 &= r_2^2, \end{aligned}$$

ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X που έχουν την ίδια δύναμη ως προς τους δύο κύκλους δίδεται από την εξίσωση

$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 - r_1^2 = (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 - r_2^2,$$

από την οποία καταλήγουμε στην εξίσωση μίας ευθείας,

$$2(p_1 - p_2)x + 2(q_1 - q_2)y = p_1^2 + q_1^2 - r_1^2 - p_2^2 - q_2^2 + r_2^2.$$

Αυτή η ευθεία είναι κάθετη στην ευθεία που περνάει από τα κέντρα των δύο κύκλων, και ονομάζεται **ριζικός άξονας** των δύο κύκλων.

Δέσμες κύκλων.

Θεωρούμε δύο κύκλους K_0 και K_1 με εξισώσεις

$$\begin{aligned} K_0: \quad x^2 + y^2 + A_0x + B_0y + C_0 &= 0, \\ K_1: \quad x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ο γραμμικός συνδυασμός των δύο εξισώσεων

$$(1 - \lambda)(x^2 + y^2 + A_0x + B_0y + C_0) + \lambda(x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1) = 0$$

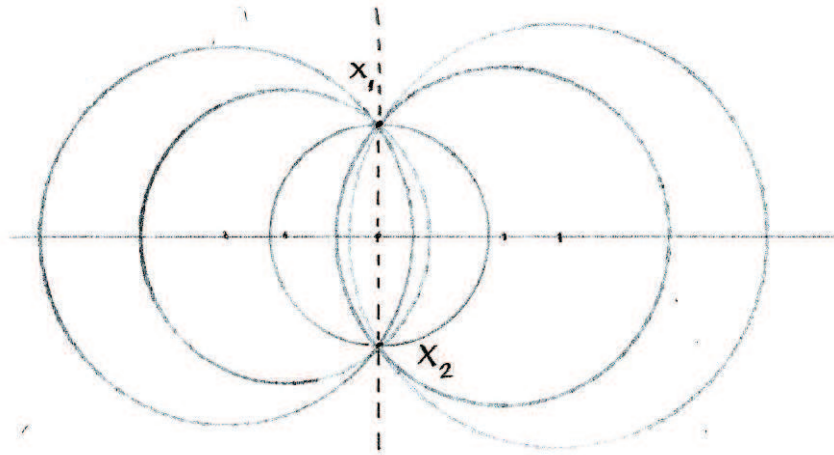
δίδει την εξίσωση

$$K_\lambda: \quad x^2 + y^2 + ((1 - \lambda)A_0 + \lambda A_1)x + ((1 - \lambda)B_0 + \lambda B_1)y + ((1 - \lambda)C_0 + \lambda C_1) = 0, \quad (4.13)$$

η οποία παριστάνει έναν κύκλο. Η οικογένεια των κύκλων K_λ για $\lambda \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **δέσμη κύκλων**.

Διακρίνουμε τρία είδη δεσμών κύκλων.

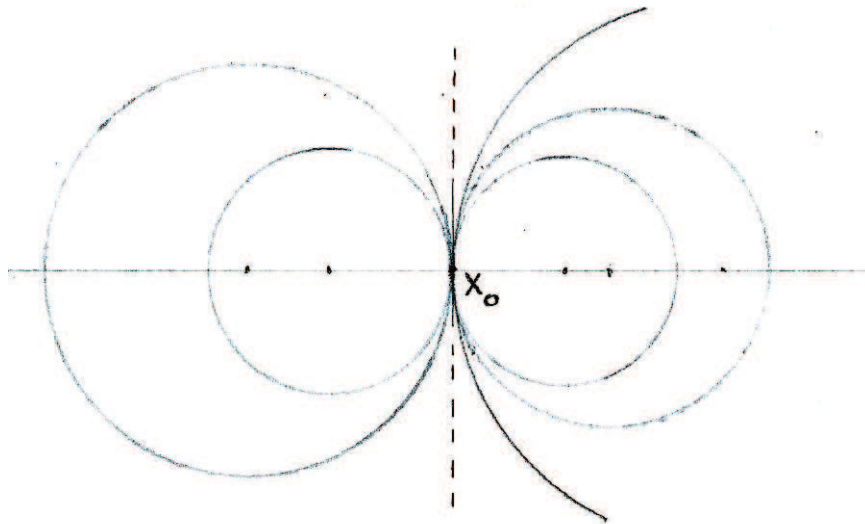
Εάν οι K_0 και K_1 τέμνονται σε δύο σημεία X_1 και X_2 , τότε οι συντεταγμένες των X_1 και X_2 ικανοποιούν την 4.13 για κάθε λ . Η δέσμη αποτελείται από όλους τους κύκλους που περνούν από τα σημεία X_1 και X_2 , και ονομάζεται **δέσμη τεμνομένων κύκλων** (ή **ελλειπτική δέσμη**), Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7: Δέσμη τεμνομένων κύκλων.

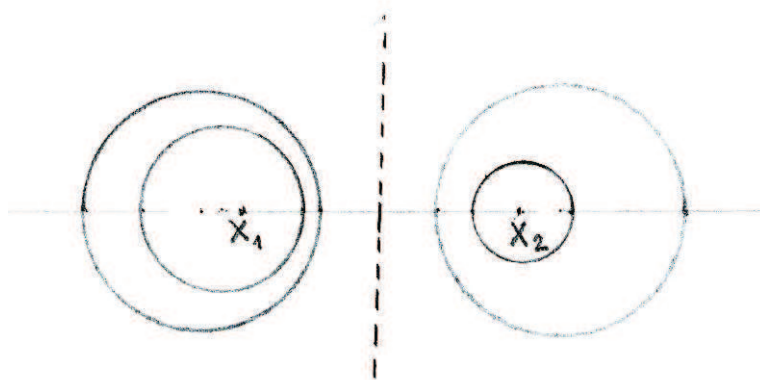
Εάν οι K_0 και K_1 εφάπτονται στο σημείο X_0 , τότε X_0 είναι το μοναδικό κοινό σημείο κάθε ζεύγους κύκλων της δέσμης. Η δέσμη ονομάζεται **δέσμη εφαπτομένων κύκλων** (ή **παραβολική δέσμη**), Σχήμα 4.8.

Εάν οι κύκλοι K_0 και K_1 δεν έχουν κοινά σημεία, τότε υπάρχουν σημεία X_0 και X_1 πάνω στην ευθεία των δύο κέντρων P_0P_1 , και πραγματικοί αριθμοί μ_0, μ_1 , τέτοια ώστε οι κύκλοι K_0 και K_1 είναι Απολλώνιοι κύκλοι του διαστήματος X_0X_1 . Δηλαδή, για κάθε σημείο X



Σχήμα 4.8: Δέσμη εφαπτομένων κύκλων.

του K_0 , $|X_0X| = \mu_0|X_1X|$, και για κάθε σημείο X του K_1 , $|X_1X| = \mu_1|X_0X|$. Σε αυτή την περίπτωση η δέσμη ονομάζεται **δέσμη μη τεμνομένων κύκλων** (ή **υπερβολική δέσμη**), Σχήμα 4.9.



Σχήμα 4.9: Δέσμη μη τεμνομένων κύκλων.

Ως ειδική περίπτωση δέσμης μη τεμνομένων κύκλων θεωρούμε τη δέσμη ομόκεντρων κύκλων: Εάν K_0 και K_1 έχουν το ίδιο κέντρο, τότε κάθε κύκλος της δέσμης K_λ θα έχει το ίδιο κέντρο.

Εάν οι δύο κύκλοι K_0 και K_1 δεν είναι ομόκεντροι, τότε ο γραμμικός συνδυασμός

$$(x^2 + y^2 + A_0x + B_0y + C_0) - (x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1) = 0$$

δίδει την εξίσωση μίας ευθείας,

$$K_{\infty} : (A_0 - A_1)x + (B_0 - B_1)y + C_0 - C_1 = 0. \quad (4.14)$$

Αυτή η ευθεία ονομάζεται **ριζικός άξονας** της δέσμης. Ο ριζικός άξονας μίας δέσμης είναι κάθετος στον άξονα των κέντρων των κύκλων της δέσμης.

Πρόταση 4.6 Ο ριζικός άξονας μίας δέσμης είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X με την ιδιότητα: Εάν K_{λ} και K_{μ} είναι κύκλοι της δέσμης, η δύναμη του σημείου X ως προς τον κύκλο K_{λ} είναι ίση με τη δύναμη του σημείου X ως προς τον κύκλο K_{μ} .

α'. Σε μία δέσμη τεμνομένων κύκλων, ο ριζικός άξονας είναι η ευθεία X_1X_2 που περιέχει τα σημεία τομής.

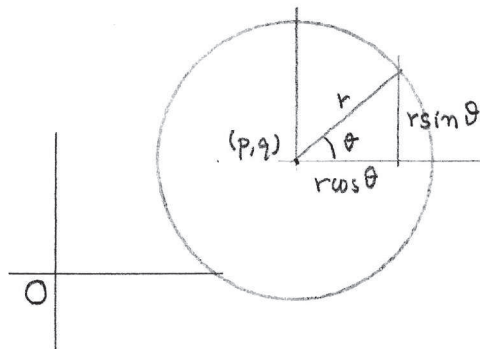
β'. Σε μία δέσμη εφαπτομένων κύκλων, ο ριζικός άξονας είναι η κοινή εφαπτομένη στο X_0 όλων των κύκλων της δέσμης.

γ'. Σε μία δέσμη μη τεμνομένων κύκλων, ο ριζικός άξονας είναι η μεσοκάθετος του διαστήματος X_0X_1 των Απολλωνίων κύκλων.

Παραμετρήσεις του κύκλου.

Εάν ϑ είναι η προσημασμένη γωνία μεταξύ του διανύσματος $\vec{i}$ και της ακτίνας $\overrightarrow{PX}$, Σχήμα 4.10, το σημείο $X : (x, y)$ του κύκλου έχει παραμετρική έκφραση

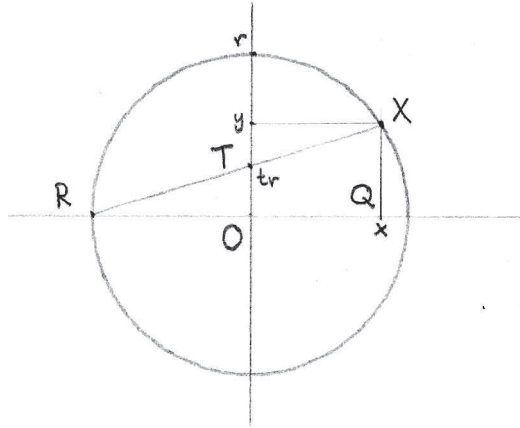
$$(x, y) = (p, q) + r(\cos \vartheta, \sin \vartheta) \quad \text{για } 0 \leq \vartheta < 2\pi.$$



Σχήμα 4.10: Τριγωνομετρική παραμέτρηση του κύκλου.

Θα δούμε μία εναλλακτική παραμετρική έκφραση, που χρησιμοποιεί μόνο ρητές συναρτήσεις και σχετίζεται με τη στερεογραφική προβολή στη σφαίρα. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα r . Από το σημείο $R : (-r, 0)$ σχεδιάζουμε ευθεία που να τέμνει τον κύκλο στο σημείο (x, y) . Αυτή η ευθεία τέμνει τον Oy -άξονα σε ένα σημείο $T : (0, tr)$. Σημειώνουμε και την

προβολή του X στον Ox -άξονα, $Q : (x, 0)$. Τότε έχουμε δύο όμοια τρίγωνα, RTO και RXQ , Σχήμα 4.11, και $tr : r = y : (x + r)$.



Σχήμα 4.11: Στερεογραφική παραμέτρηση του κύκλου.

Αντικαθιστώντας $y = t(x + r)$ στην 4.2 βρίσκουμε

$$x = r \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = r \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Εάν το κέντρο του κύκλου είναι στο $P : (p, q)$, έχουμε την παραμέτρηση

$$(x, y) = (p, q) + r \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

η οποία δίδει όλα τα σημεία του κύκλου εκτός από το σημείο $(p - r, q)$. Αυτό το σημείο είναι το όριο καθώς $t \rightarrow \pm\infty$.