

## Διάλεξη 15

### Ο Κύκλος

Ο κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση  $r > 0$  από ένα σημείο  $P$ , το κέντρο του κύκλου.

Η διανυσματική εξίσωση που ικανοποιεί το γενικό σημείο  $X : (x, y)$  του κύκλου είναι

$$|\overrightarrow{PX}| = r$$

Εάν το κέντρο έχει συντεταγμένες  $P : (p, q)$  ως προς το σύστημα αναφοράς  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \quad (4.1)$$

Εάν το κέντρο βρίσκεται στο σημείο αναφοράς  $O$ , η εξίσωση του κύκλου είναι

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (4.2)$$

Η γενική εξίσωση του κύκλου είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \quad (4.3)$$

Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα έχουμε

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + C &= 0 \\ \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 &= \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C. \end{aligned}$$

Εάν  $A^2 + B^2 - 4C > 0$  η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο  $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$  και ακτίνα  $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ . Εάν  $A^2 + B^2 - 4C = 0$  η εξίσωση ικανοποιείται μόνον από το σημείο  $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ , ενώ εάν  $A^2 + B^2 - 4C < 0$  δεν υπάρχουν πραγματικές τιμές που να ικανοποιούν την εξίσωση.

Μπορούμε να βρούμε τον μοναδικό κύκλο που περνάει από τρία σημεία που δεν βρίσκονται σε ευθεία.

**Παράδειγμα 4.1** Ο κύκλος που περνάει από τα σημεία  $(1, 2)$ ,  $(0, 1)$  και  $(2, 0)$  έχει εξίσωση της μορφής 4.3. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των σημείων έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} A + 2B + C &= -5 \\ 0 + B + C &= -1 \\ 2A + 0 + C &= -4 \end{aligned}$$

από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $A, B, C$ . Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε  $3A = -7$ ,  $3B = -5$ ,  $3C = 2$ . Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι  $3x^2 + 3y^2 - 7x - 5y + 2 = 0$ . Ο κύκλος έχει κέντρο  $(7/6, 5/6)$  και ακτίνα  $r = 5\sqrt{2}/6$ .

**Πρόταση 4.1** Ο κύκλος που περνάει από τα σημεία  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$  και  $(a_3, b_3)$  έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

όπου  $A, B, C$  ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_1 A + b_1 B + C &= -a_1^2 - b_1^2, \\ a_2 A + b_2 B + C &= -a_2^2 - b_2^2, \\ a_3 A + b_3 B + C &= -a_3^2 - b_3^2. \end{aligned}$$

## Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις σχετικές θέσεις της ευθείας και του κύκλου. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που το κέντρο του κύκλου είναι στο σημείο αναφοράς. Οι εξισώσεις για τη γενική περίπτωση μπορούν εύκολα να υπολογιστούν με αλλαγή του σημείου αναφοράς, και δίδονται ως ασκήσεις.

**Ορισμός 4.1.** Μία ευθεία είναι **εφαπτομένη** ενός κύκλου εάν έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τον κύκλο.

Θεωρούμε κύκλο  $K$  με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $r$ , και μία ευθεία  $\varepsilon$  που περνάει από τα σημεία  $X_1 : (x_1, y_1)$  και  $X_2 : (x_2, y_2)$ . Υπενθυμίζουμε ότι το γενικό σημείο  $X : (x, y)$  της ευθείας  $\varepsilon$ , μπορεί να προσδιοριστεί από τον απλό λόγο  $(X_1, X_2, X)$ , που είναι ο λόγος των προσημασμένων μηκών  $\frac{\overrightarrow{X_1 X}}{\overrightarrow{X X_2}}$ . Από την 1.5, το σημείο με απλό λόγο  $(X_1, X_2, X) = t$ , έχει συντεταγμένες,

$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \quad y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t}. \quad (4.4)$$

Το σημείο  $X$  βρίσκεται στον κύκλο εάν

$$\left( \frac{x_1 + tx_2}{1+t} \right)^2 + \left( \frac{y_1 + ty_2}{1+t} \right)^2 = r^2,$$

ή, αφού ο απλός λόγος δεν παίρνει την τιμή  $-1$ ,

$$(x_1 + tx_2)^2 + (y_1 + ty_2)^2 = r^2(1+t)^2.$$

Συγκεντρώνουμε τους όρους ίδιου βαθμού σε  $t$ ,

$$(x_2^2 + y_2^2 - r^2)t^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2 - r^2)t + (x_1^2 + y_1^2 - r^2) = 0. \quad (4.5)$$

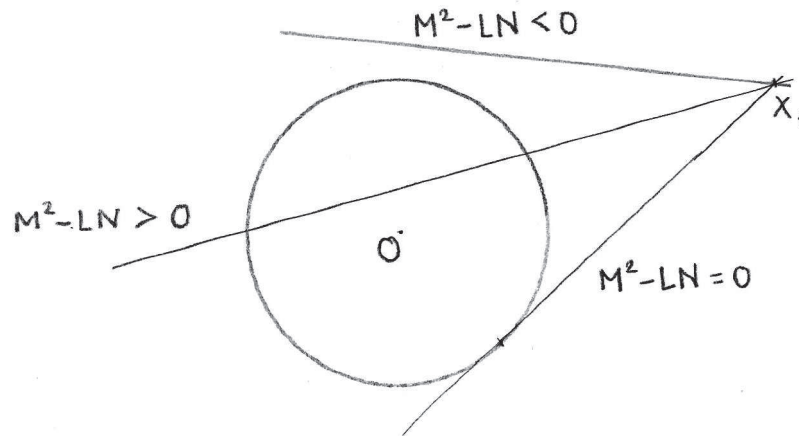
Θέτουμε

$$L = x_2^2 + y_2^2 - r^2, \quad M = x_1x_2 + y_1y_2 - r^2, \quad N = x_1^2 + y_1^2 - r^2, \quad (4.6)$$

ώστε η 4.5 να γίνει

$$Lt^2 + 2Mt + N = 0. \quad (4.7)$$

Το σημείο  $X$  με συντεταγμένες 4.4 ανήκει στον κύκλο  $K$  εάν και μόνον εάν η παράμετρος  $t$  ικανοποιεί την εξίσωση 4.7. Η εξίσωση 4.7 έχει δύο λύσεις όταν η διακρίνουσα είναι θετική, δηλαδή όταν  $M^2 - LN > 0$ , μία λύση όταν  $M^2 - LN = 0$  και καμμία λύση όταν  $M^2 - LN < 0$ , Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου.

Ειδικότερα, η ευθεία που περνάει από τα σημεία  $X_1$  και  $X_2$  έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο  $K$  όταν η εξίσωση 4.7 έχει μοναδική λύση, δηλαδή όταν η διακρίνουσα της εξίσωσης 4.7 είναι μηδέν,

$$M^2 - LN = 0. \quad (4.8)$$

Αυτή είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η ευθεία  $\varepsilon$  εφαπτομένη του κύκλου  $K$ .

Εάν  $X_1$  βρίσκεται στον κύκλο,  $N = x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$ , και η συνθήκη 4.8 γίνεται  $M = 0$ . Άρα ένα σημείο  $X$  βρίσκεται στην ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο  $K$  στο σημείο  $X_1$  εάν και μόνον εάν

$$x_1x + y_1y = r^2.$$

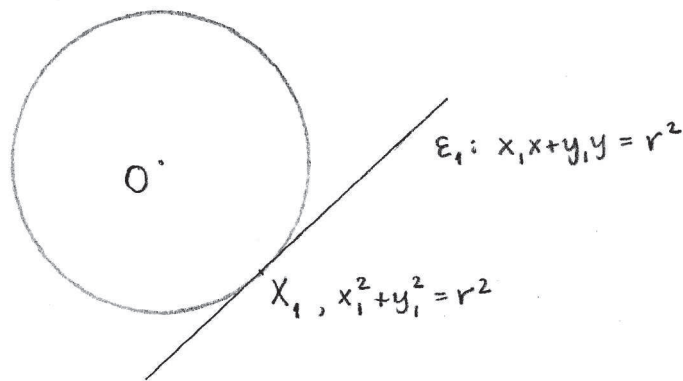
Παρατηρούμε ότι τότε το διάνυσμα  $\overrightarrow{X_1X} = (x - x_1, y - y_1)$ , που είναι ένα διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας, είναι κάθετο στην ακτίνα από το κέντρο του κύκλου στο σημείο  $X_1$ ,  $\overrightarrow{OX_1} = (x_1, y_1)$ .

**Πρόταση 4.2** Θεωρούμε κύκλο  $K$  με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $r$ , και σημείο  $X_1 : (x_1, y_1)$  που ανήκει στον κύκλο. Η εφαπτομένη του κύκλου  $K$  στο σημείο  $X_1$  είναι η ευθεία με εξίσωση

$$x_1x + y_1y = r^2. \quad (4.9)$$

Η εφαπτομένη στον κύκλο στο σημείο  $X_1$  είναι κάθετη στην ακτίνα  $OX_1$ .

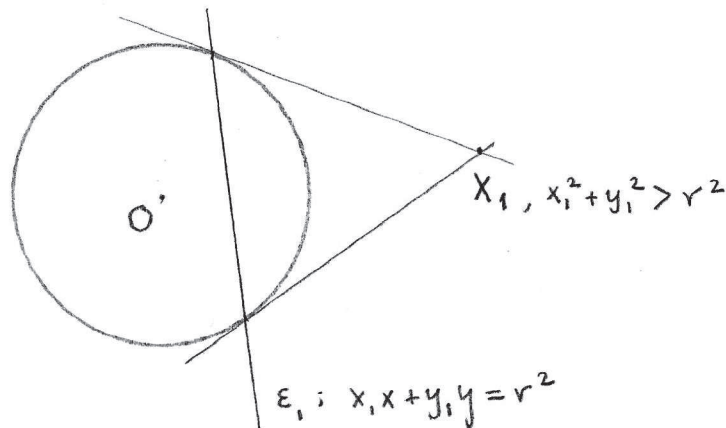
Τώρα εξετάζουμε την περίπτωση που  $X_1$  βρίσκεται έξω από τον κύκλο, και  $x_1^2 + y_1^2 > r^2$ . Εάν  $X : (x, y)$  είναι ένα σημείο μίας ευθείας που περνάει από το  $X_1$  και εφάπτεται στον κύκλο,

Σχήμα 4.2: Εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο  $X_1$  του κύκλου.

τα  $X_1$  και  $X$  ικανοποιούν τη σχέση 4.8, δηλαδή

$$(x_1x + y_1y - r^2)^2 - (x_1^2 + y_1^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2) = 0. \quad (4.10)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι αυτή η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο  $X_1$ . Αυτές είναι οι δύο εφαπτόμενες ευθείες από το  $X_1$  προς τον κύκλο  $K$ .

Σχήμα 4.3: Εφαπτόμενες στον κύκλο από το σημείο  $X_1$ .

Τα σημεία  $X_2 : (x_2, y_2)$  και  $X_3 : (x_3, y_3)$  στα οποία αυτές οι ευθείες εφάπτονται στον κύκλο ικανοποιούν την 4.10 και την  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ , συνεπώς βρίσκονται στην ευθεία με εξίσωση  $x_1x + y_1y = r^2$ . Θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες αυτών των σημείων.

Εάν  $y_1 = 0$ , τότε  $x_1^2 > r^2$ , και βρίσκουμε  $x_2 = x_3 = \frac{r^2}{x_1}$  και  $y_2, y_3 = \pm \frac{r}{x_1} \sqrt{x_1^2 - r^2}$ .

Εάν  $y_1 \neq 0$ , αντικαθιστούμε  $y = \frac{r^2 - x_1x}{y_1}$  στην  $x^2 + y^2 = r^2$  και έχουμε  $(x_1^2 + y_1^2)x^2 -$

$2x_1r^2x + r^2(r^2 - y_1^2) = 0$ , την οποία λύνουμε και βρίσκουμε

$$x_2, x_3 = \frac{x_1r^2 \pm ry_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Αντικαθιστώντας στην 4.10 βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές των  $y_2, y_3$

$$y_2, y_3 = \frac{y_1r^2 \mp rx_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Εάν θέσουμε  $\vartheta$  τη γωνία  $X_1OX_2$ , έτσι ώστε  $\cos \vartheta = \frac{r}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$  και  $\sin \vartheta = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ , έχουμε

$$x_2, x_3 = x_1 \cos^2 \vartheta \pm y_1 \cos \vartheta \sin \vartheta$$

και

$$y_2, y_3 = y_1 \cos^2 \vartheta \mp x_1 \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

**Πρόταση 4.3** Εάν  $X_1 : (x_1, y_1)$  είναι σημείο έξω από τον κύκλο  $K$ ,  $x_1^2 + y_1^2 > r^2$ , τότε υπάρχουν δύο ευθείες από το  $X_1$  που εφάπτονται στον κύκλο. Τα σημεία επαφής  $X_2$  και  $X_3$  βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση  $x_1x + y_1y = r^2$  και έχουν συντεταγμένες  $(x_2, y_2)$  και  $(x_3, y_3)$  που δίδονται από

$$x_2, x_3 = x_1 \cos^2 \vartheta \pm y_1 \cos \vartheta \sin \vartheta$$

και

$$y_2, y_3 = y_1 \cos^2 \vartheta \mp x_1 \cos \vartheta \sin \vartheta,$$

$$\text{όπου } \cos \vartheta = \frac{r}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{ και } \sin \vartheta = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

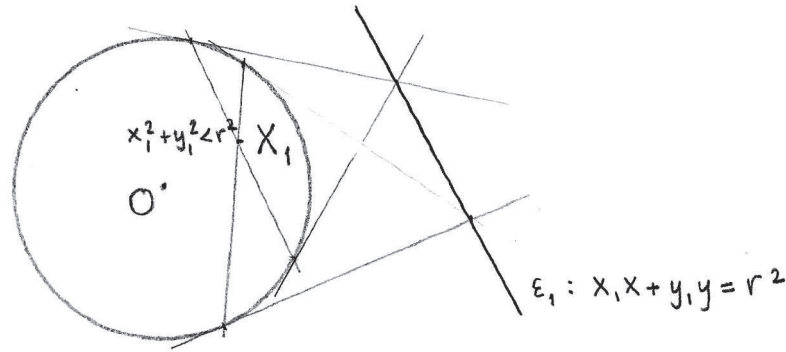
Τέλος εξετάζουμε την περίπτωση όπου το  $X_1$  βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου, και  $x_1^2 + y_1^2 < r^2$ . Τότε κάθε ευθεία από το  $X_1$  τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.

Θεωρούμε πάλι την εξίσωση  $x_1x + y_1y = r^2$ , για  $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ . Αφού

$$x_1x + y_1y = \vec{OX} \cdot \vec{OX}_1 \leq |\vec{OX}| |\vec{OX}_1|,$$

και  $|\vec{OX}_1| < r$ , συμπεραίνουμε ότι  $|\vec{OX}| > r$ , δηλαδή ότι η ευθεία με εξίσωση  $x_1x + y_1y = r^2$  βρίσκεται ολόκληρη έξω από τον κύκλο. Εάν  $X_2$  είναι σημείο αυτής της ευθείας, τότε  $x_2^2 + y_2^2 > r^2$ , και από την Πρόταση 4.3, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες από το  $X_2$  προς τον κύκλο και τα σημεία επαφής αυτών των δύο εφαπτομένων βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση  $x_2x + y_2y = r^2$ . Αλλά το σημείο  $X_1$  ικανοποιεί αυτή την εξίσωση. Συμπεραίνουμε ότι το  $X_1$  βρίσκεται πάνω στην ευθεία που συνδέει τα δύο σημεία επαφής των εφαπτομένων από οποιοδήποτε σημείο της ευθείας με εξίσωση  $x_1x + y_1y = r^2$ .

**Πρόταση 4.4** Εάν  $X_1 : (x_1, y_1)$  είναι σημείο στο εσωτερικό του κύκλου  $K$ , διαφορετικό από το  $O$ ,  $0 < x_1^2 + y_1^2 < r^2$ , τότε η ευθεία με εξίσωση  $x_1x + y_1y = r^2$  βρίσκεται ολόκληρη έξω από τον κύκλο  $K$ . Εάν  $X_2$  είναι σημείο αυτής της ευθείας, τότε το  $X_1$  βρίσκεται πάνω στην ευθεία που συνδέει το σημείο επαφής των εφαπτομένων από το  $X_2$  προς τον κύκλο  $K$ .

Σχήμα 4.4:  $X_1$  εσωτερικό σημείο του κύκλου.

## Πόλοι και πολικές ευθείες ως προς κύκλο

**Ορισμός 4.2.** Θεωρούμε κύκλο  $K$  με κέντρο  $P : (p, q)$  και ακτίνα  $r$ ,  $K : (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ , και σημείο  $X_1 : (x_1, y_1)$  διαφορετικό από το  $P$ . Η ευθεία με εξίσωση

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2 \quad (4.11)$$

ονομάζεται **πολική ευθεία** του σημείου  $X_1$  ως προς τον κύκλο  $K$ .

Η πολική ευθεία του σημείου  $X_1$  είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\overrightarrow{PX_1}$ : Η ευθεία με εξίσωση 4.11 έχει διάνυσμα διεύθυνσης  $\vec{u} = (-y_1 + q, x_1 - p)$ , και  $\overrightarrow{PX_1} \cdot \vec{u} = 0$ . Το σημείο  $X_0$  στο οποίο η πολική ευθεία τέμνει την ευθεία  $PX_1$  ικανοποιεί την εξίσωση 4.11, και συνεπώς  $\overrightarrow{PX_1} \cdot \overrightarrow{PX_0} = (x_1 - p)(x_0 - p) + (y_1 - q)(y_0 - q) = r^2$ . Αφού τα  $\overrightarrow{PX_1}$  και  $\overrightarrow{PX_0}$  είναι συγγραμμικά και ομόρροπα,  $\overrightarrow{PX_1} \cdot \overrightarrow{PX_0} = |\overrightarrow{PX_1}| |\overrightarrow{PX_0}| = r^2$ . Άρα

$$\overrightarrow{PX_0} = \frac{|\overrightarrow{PX_0}|}{|\overrightarrow{PX_1}|} \overrightarrow{PX_1} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{PX_1}|^2} \overrightarrow{PX_1}.$$

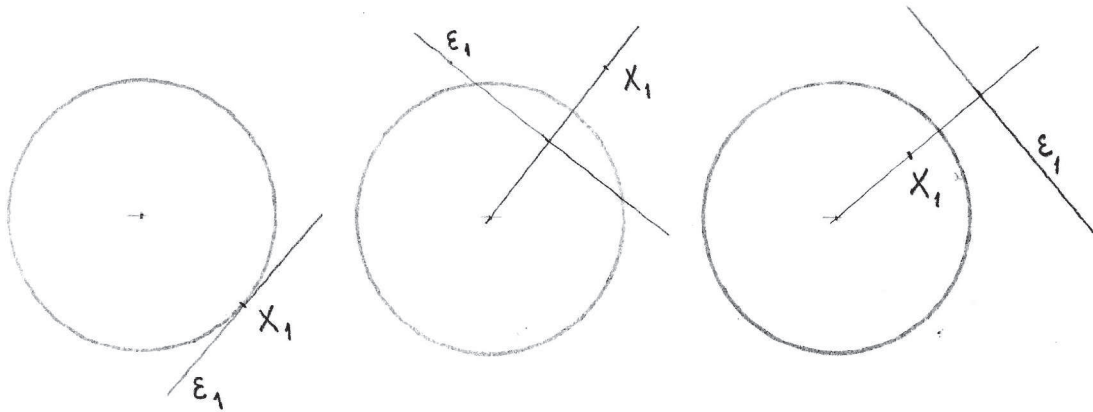
Το σημείο  $X_0$  προκύπτει από το σημείο  $X_1$  με γεωμετρική αντιστροφή στον κύκλο με κέντρο  $P$  και ακτίνα  $r$ .

Εάν  $\varepsilon_1$  είναι ευθεία του επιπέδου που δεν περνάει από το σημείο  $P$ , υπάρχει μοναδικό σημείο  $X_1$  τέτοιο ώστε  $\varepsilon_1$  είναι η πολική ευθεία του  $X_1$ . Το σημείο  $X_1$  ονομάζεται **πόλος** της ευθείας  $\varepsilon_1$  ως προς τον κύκλο  $K$ .

Συγκρίνοντας την εξίσωση  $Ax + By + C = 0$  της ευθείας  $\varepsilon_1$  με την εξίσωση 4.11 της πολικής του σημείου  $X_1$ , βλέπουμε ότι

$$\lambda A = x_1 - p, \quad \lambda B = y_1 - q, \quad -\lambda C = p(x_1 - p) + q(y_1 - q) + r^2.$$

Άρα  $\lambda(Ap + Bq + C) = -r^2$ .



Σχήμα 4.5: Πόλοι και πολικές ευθείες.

**Πρόταση 4.5** Εάν η ευθεία  $\varepsilon_1$  έχει εξίσωση  $Ax + By + C = 0$ , ο πόλος  $X_1$  της  $\varepsilon_1$  ως προς τον κύκλο  $K : (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$  έχει συντεταγμένες

$$x_1 = p - \frac{Ar^2}{Ap + Bq + C}, \quad y_1 = q - \frac{Br^2}{Ap + Bq + C}.$$