

Διάλεξη 14

Μετασχηματισμοί Möbius του μιγαδικού επιπέδου

Οι μετασχηματισμοί Möbius είναι μία οικογένεια απεικονίσεων από το μιγαδικό επίπεδο στο μιγαδικό επίπεδο που περιλαμβάνουν τους ευκλείδειους μετασχηματισμούς και τις αντιστροφές. Εδώ θα περιοριστούμε στους μετασχηματισμούς Möbius που διατηρούν τον προσανατολισμό του επιπέδου, δηλαδή το πρόσημο της γωνίας περιστροφής.

Ορισμός 3.3. Ένας μετασχηματισμός Möbius είναι μία συνάρτηση της μορφής

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ όπου } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \text{ και } ad - bc \neq 0.$$

Ο περιορισμός $ad - bc \neq 0$ χρειάζεται για να εξασφαλίσουμε ότι η f δεν είναι μία σταθερή συνάρτηση. Για παράδειγμα, εάν $ad - bc = 0$ και $cd \neq 0$, τότε $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, και για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$. Με αυτόν τον περιορισμό, εάν $c \neq 0$ η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε μιγαδικό αριθμό εκτός από τον $-\frac{d}{c}$, και παίρνει τιμές σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το $\frac{a}{c}$. Δηλαδή ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}.$$

Εάν $c = 0$ τότε η f ορίζεται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, και είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Παράδειγμα 3.14 Η ταυτοτική απεικόνιση είναι μετασχηματισμός Möbius: $z = \frac{1z+0}{0z+1}$. Η αναλυτική αντιστροφή είναι επίσης μετασχηματισμός Möbius: $\frac{1}{z} = \frac{0z+1}{1z+0}$.

Δραστηριότητα 3.25 Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις στη μορφή $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, για να δείξετε ότι είναι μετασχηματισμοί Möbius.

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & f(z) = 2z \\ \beta'. & f(z) = (3+i)z \\ \gamma'. & f(z) = z - 4i \\ \delta'. & f(z) = \frac{2}{3z} \\ \epsilon'. & f(z) = \frac{1}{3z-i} \\ \zeta'. & f(z) = \frac{z}{1+z} \end{array}$$

Ένας μετασχηματισμός Möbius είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση: εάν $f(z) = w$, μπορούμε να εκφράσουμε το z ως συνάρτηση του w . Από τη σχέση $w = \frac{az+b}{cz+d}$ έχουμε

$$\begin{aligned} az + b &= czw + dw \\ (-cw + a)z &= dw - b \\ \text{άρα } z &= \frac{dw - b}{-cw + a}. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε ότι ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ έχει αντίστροφη συνάρτηση

$$f^{-1}: \mathbb{C} \setminus \{a/c\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}, \quad f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Δραστηριότητα 3.26 Γράψτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό f^{-1} για τους μετασχηματισμούς Möbius της Δραστηριότητας 3.25

Θέλουμε να εξετάσουμε τα σταθερά σημεία ενός μετασχηματισμού Möbius, δηλαδή τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους $f(z) = z$.

Εάν $c = 0$, τότε $ad \neq 0$, άρα $d \neq 0$, και ο μετασχηματισμός Möbius $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ έχει τη μορφή $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Εάν $a \neq d$, ο f έχει ένα σταθερό σημείο, το $z = \frac{b}{d-a}$. Εάν $a = d$ και $b \neq 0$ ο f δεν έχει κανένα σταθερό σημείο.

Εάν $c \neq 0$, ο μετασχηματισμός $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ έχει δύο σταθερά σημεία, τα οποία είναι οι λύσεις της εξίσωσης $az + b = (cz + d)z$, δηλαδή

$$z = \frac{1}{2c} \left(a - d + ((a - d)^2 + 4bc)^{1/2} \right).$$

Παράδειγμα 3.15 Τα σταθερά σημεία του μετασχηματισμού Möbius $f(z) = \frac{z+1}{z-2}$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^2 - 3z - 1 = 0$, δηλαδή $z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ και $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Δραστηριότητα 3.27 Βρείτε τα σταθερά σημεία των μετασχηματισμών Möbius

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & f(z) = (3+i)z \\ \gamma'. & f(z) = \frac{1}{3z-i} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \beta'. & f(z) = \frac{z}{1+z} \\ \delta'. & f(z) = \frac{2z-i}{z+1-i} \end{array}$$

Οι μετασχηματισμοί Möbius απεικονίζουν κύκλους σε κύκλους ή σε ευθείες, και ευθείες σε κύκλους ή σε ευθείες.

Παράδειγμα 3.16 Θέλουμε να βρούμε την εικόνα του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα 1, $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, από το μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{z+1}{z-2}$. Εάν ο μιγαδικός αριθμός $w = \frac{z+1}{z-2}$ ανήκει στο σύνολο $f(S)$, τότε ο $f^{-1}(w) \in S$.

Υπολογίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση: αφού $w(z-2) = z+1$, έχουμε $z(w-1) = 2w+1$ και

$$f^{-1}(w) = z = \frac{2w+1}{w-1}. \quad (3.25)$$

Άρα η εικόνα $f(S)$ αποτελείται από τους μιγαδικούς αριθμούς w για τους οποίους $|f^{-1}(w)| = 1$, δηλαδή

$$\left| \frac{2w+1}{w-1} \right| = 1.$$

Αφού $|z|^2 = z\bar{z}$, υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε

$$(2w+1)(2\bar{w}+1) = (w-1)(\bar{w}-1),$$

απ' όπου βρίσκουμε $w\bar{w} + w + \bar{w} = 0$. Προσθέτουμε 1 και στις δύο πλευρές, παραγοντοποιούμε και βρίσκουμε

$$(w+1)(\bar{w}+1) = 1,$$

δηλαδή την εξίσωση του κύκλου με κέντρο -1 και ακτίνα 1. Άρα η εικόνα $f(S)$ είναι ο κύκλος με κέντρο -1 και ακτίνα 1.

Κατόπιν θέλουμε να βρούμε την εικόνα του φανταστικού άξονα $i\mathbb{R}$, με εξίσωση $z + \bar{z} = 0$ από το μετασχηματισμό f . Ο μιγαδικός αριθμός w θα ανήκει στην εικόνα $f(i\mathbb{R})$ εάν $f^{-1}(w) \in i\mathbb{R}$, δηλαδή εάν $f^{-1}(w) + \overline{f^{-1}(w)} = 0$. Αντικαθιστώντας από την 3.25 βρίσκουμε την εξίσωση του συνόλου $f(i\mathbb{R})$,

$$(2w + 1)(\bar{w} - 1) = -(2\bar{w} + 1)(w - 1),$$

η οποία γίνεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} 4w\bar{w} - w - \bar{w} &= 2 \\ w\bar{w} - \frac{1}{4}w - \frac{1}{4}\bar{w} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} &= \frac{1}{2} \\ \left(w - \frac{1}{4}\right) \left(\bar{w} - \frac{1}{4}\right) &= \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

Άρα η εικόνα του φανταστικού άξονα από το μετασχηματισμό f είναι ο κύκλος με κέντρο $\frac{1}{4}$ και ακτίνα $\frac{3}{4}$.

Παράδειγμα 3.17 Θα βρούμε την εικόνα του κύκλου C , με κέντρο i και ακτίνα 1, από το μετασχηματισμό $f(z) = \frac{2z-1}{z+1-i}$. Αρχικά βρίσκουμε τον αντίστροφο, $f^{-1}(w) = \frac{(1-i)w+1}{-w+2}$. Άρα w βρίσκεται στην εικόνα του κύκλου εάν

$$\left| \frac{(1-i)w+1}{-w+2} - i \right| = 1,$$

που γίνεται $|w+1-2i| = |w-2|$. Δηλαδή η εικόνα $f(C)$ είναι μία ευθεία, η μεσοκάθετος των σημείων 2 και $-1+2i$.

Αφού η απεικόνιση f είναι συνεχής, το εσωτερικό του κύκλου C απεικονίζεται στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία $f(C)$. Για να βρούμε σε ποιο, αρκεί να ελέγξουμε ένα σημείο, για παράδειγμα την εικόνα του κέντρου του κύκλου, $f(i) = \frac{2i-1}{i+1-i} = 2i-1$. Άρα το εσωτερικό του κύκλου απεικονίζεται στο ημιεπίπεδο $|w+1-2i| < |w-2|$.

Δραστηριότητα 3.28 Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{z+1}{z-2}$ απεικονίζει τον κύκλο $|z - \frac{1}{2}| = \frac{3}{2}$ στον φανταστικό άξονα.

Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση

Θεωρούμε τους αριθμούς $t + i\vartheta$ και $s + i\varphi$, καθώς και τους $e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ και $e^s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Παρατηρούμε ότι

$$e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \cdot e^s(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{t+s}(\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi))$$

και

$$[e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^n = e^{nt}(\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)),$$

δηλαδή ότι η αντιστοίχιση

$$t + i\vartheta \mapsto e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

έχει τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης, να απεικονίζει αθροίσματα σε γινόμενα και απέ-
ρεια πολλαπλασία σε δυνάμεις.

Με βάση αυτή την παρατήρηση θα ορίσουμε τη **μιγαδική εκθετική συνάρτηση**

$$\exp(z) = e^{t+i\vartheta} = e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

ή

$$\exp(z) = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)).$$

Η συνάρτηση $\exp : z \mapsto e^z$ έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{C}$, και σύνολο τιμών όλους τους μη
μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς. Συνεπώς κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός μπορεί να
εκφραστεί σε **εκθετική μορφή**

$$z = e^{\log|z| + i \operatorname{Arg} z}.$$

Η εκθετική μορφή μπορεί να θεωρηθεί και ως συντομότερος τρόπος γραφής της τριγωνομε-
τρικής μορφής, αφού

$$e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = e^{t+i\vartheta}.$$

Δραστηριότητα 3.29 Γράψτε τους ακόλουθους αριθμούς στη μορφή $a + bi$ για
 $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\alpha'. \quad e^{i\pi/3}$$

$$\beta'. \quad e^{-i\pi/3}$$

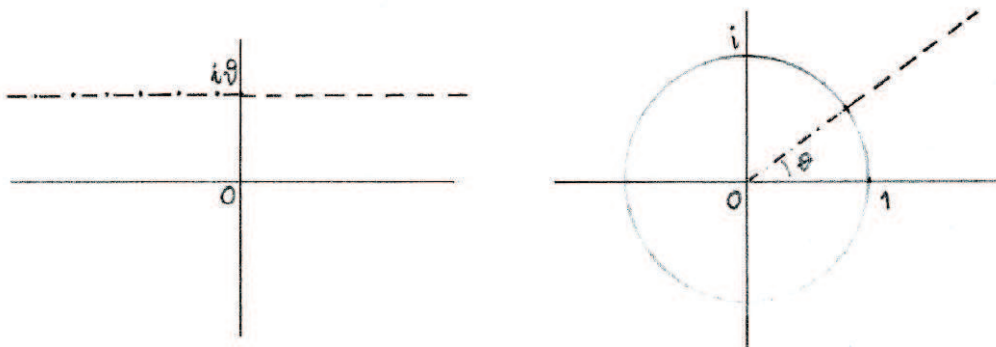
$$\gamma'. \quad e^{\log 3 + i\pi}$$

$$\delta'. \quad e^{\frac{1}{2} + 5i\pi}$$

$$\varepsilon'. \quad e^{2 - \frac{3i\pi}{4}}$$

$$\zeta'. \quad e^{2 + \frac{3i\pi}{4}}$$

Η εκθετική συνάρτηση απεικονίζει την ευθεία $z - \bar{z} = 2i\vartheta$, δηλαδή το σύνολο των μιγαδικών
αριθμών με φανταστικό μέρος ίσο με ϑ , στην ημιευθεία από το 0 που σχηματίζει γωνία ϑ με
το θετικό πραγματικό ημιάξονα, Σχέδιο 3.10. Για $t > 0$, ο μιγαδικός αριθμός $e^{t+i\vartheta}$ βρίσκεται
στο μέρος αυτής της ημιευθείας που είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο. Για $t = 0$, ο μιγαδικός
αριθμός $e^{i\vartheta}$ βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Ενώ για $t < 0$, ο μιγαδικός αριθμός $e^{t+i\vartheta}$
βρίσκεται στο μέρος αυτής της ημιευθείας που είναι στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

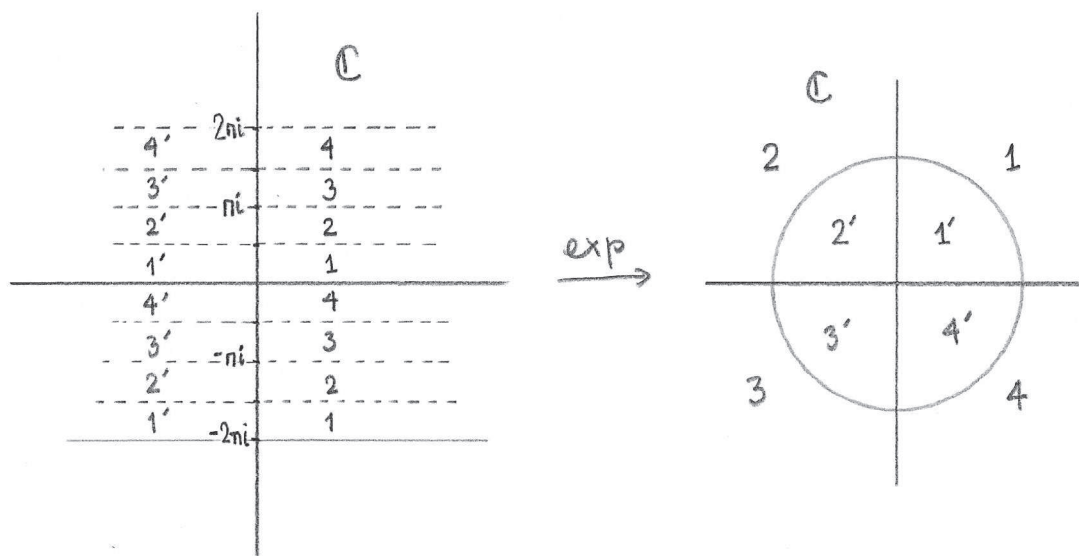


Σχήμα 3.10: Η εικόνα της ευθείας $z - \bar{z} = 2i\vartheta$.

Εάν $\vartheta - \varphi = 2k\pi$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$e^{t+i\vartheta} = e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = e^t(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{t+i\varphi}.$$

Το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}$, δηλαδή η λωρίδα στο μιγαδικό επίπεδο μεταξύ της πραγματικής ευθείας (που ανήκει στο σύνολο) και της ευθείας $\operatorname{Im} z = 2\pi$ (που δεν ανήκει στο σύνολο) απεικονίζεται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός από το 0. Το ίδιο ισχύει για κάθε οριζόντια λωρίδα με πλάτος 2π που περιλαμβάνει τη μία από τις δύο ευθείες που αποτελούν το σύνορό της. Στο Σχήμα 3.11 τέτοιες λωρίδες είναι, για παράδειγμα, οι $\{t + i\vartheta : 0 \leq \vartheta < 0\}$, $\{t + i\vartheta : -\pi \leq \vartheta < \pi\}$ και $\{t + i\vartheta : -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta < \frac{3\pi}{2}\}$. Προσέξτε τις περιοχές 1, 2, 3, 4 και 1', 2', 3', 4' κάθε λωρίδας, που απεικονίζονται στις αντίστοιχες περιοχές του εσωτερικού ή του εξωτερικού του μοναδιαίου κύκλου.



Σχήμα 3.11: Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση.

Μπορούμε να φανταστούμε ότι η μιγαδική εκθετική συνάρτηση τυλίγει τη λωρίδα $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ ώστε να σχηματιστεί ένας κύλινδρος, στη συνέχεια τυλίγει όλο το μιγαδικό επίπεδο άπειρες φορές γύρω από αυτόν τον κύλινδρο, και τέλος ανοίγει τον κύλινδρο πάνω στο επίπεδο (χωρίς το 0!) όπως ανοίγει μία ομπρέλα.

Δραστηριότητα 3.30 Δείξτε ότι η εκθετική συνάρτηση απεικονίζει την ευθεία $\operatorname{Re} z = 2$ στον κύκλο $|w| = e^2$.

Δείξτε ότι η εκθετική συνάρτηση απεικονίζει την ευθεία $\operatorname{Im} z = \pi/4$ στην ημιευθεία $w = t(1 + i)$, για $t > 0$.

Συνοψίζουμε τις ιδιότητες της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 3.9 Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}(\cos \operatorname{Im}(z) + i \sin \operatorname{Im}(z)),$$

έχει τις ιδιότητες

$$\alpha'. \quad e^z e^w = e^{z+w},$$

$$\beta'. \quad (e^z)^n = e^{nz},$$

$$\gamma'. \quad e^{z+2k\pi i} = e^z,$$

$$\delta'. \quad (e^z)^{-1} = e^{-z},$$

$$\epsilon'. \quad e^{\bar{z}} = \overline{e^z},$$

$$\zeta'. \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \text{ και } \operatorname{Arg}(e^z) \equiv \operatorname{Im} z.$$