

Διάλεξη 13

Κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο με συντεταγμένες (u, v) και ακτίνα $r > 0$ αποτελείται από όλα τα σημεία με συντεταγμένες (x, y) που απέχουν r από το σημείο (u, v) , δηλαδή που ικανοποιούν την εξίσωση

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2. \quad (3.18)$$

Στο μιγαδικό επίπεδο ο κύκλος με κέντρο $w = u + vi$ και ακτίνα $r > 0$ αποτελείται από τα σημεία z που ικανοποιούν την εξίσωση $|z - w| = r$, δηλαδή

$$(z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = r^2. \quad (3.19)$$

Δραστηριότητα 3.21 Δείξτε ότι εάν αντικαταστήσετε $z = x + yi$ και $w = u + vi$ στην 3.19 παίρνετε την 3.18.

Θα δούμε μία άλλη περιγραφή του κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο. Θεωρούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων z των οποίων οι αποστάσεις από δύο σημεία w_1 και w_2 έχουν σταθερό λόγο λ . Εάν $\lambda = 1$ έχουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από τα δύο σημεία, δηλαδή τη μεσοκάθετο των σημείων w_1 και w_2 . Θα εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν $\lambda \neq 1$.

Θεωρούμε δύο σταθερά σημεία w_1 και w_2 του μιγαδικού επιπέδου και εξετάζουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$|z - w_1| = \lambda |z - w_2|, \quad \lambda > 0, \lambda \neq 1. \quad (3.20)$$

Εξετάζουμε πρώτα τα σημεία z τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση και βρίσκονται πάνω στην ευθεία η οποία συνδέει τα w_1, w_2 . Υπάρχουν δύο τέτοια σημεία, ένα σημείο p που διαιρεί (εσωτερικά) το διάστημα $w_1 w_2$ σε απλό λόγο λ , και ένα δεύτερο p' που διαιρεί (εξωτερικά) το διάστημα $w_1 w_2$ σε απλό λόγο $-\lambda$.

Με το συμβολισμό του απλού λόγου, Κεφάλαιο 1, σελ. 20,

$$(w_1, w_2, p) = \frac{p - w_1}{w_2 - p},$$

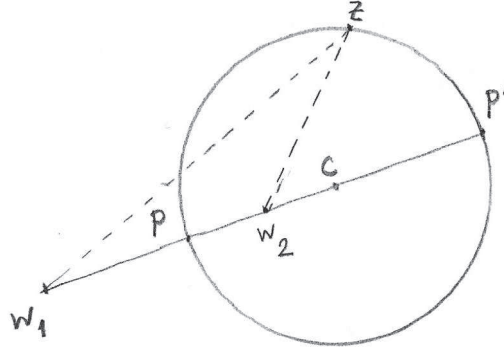
και έχουμε

$$\frac{p - w_1}{w_2 - p} = \lambda = -\frac{p' - w_1}{w_2 - p'}.$$

Λύνοντας ως προς p και p' ,

$$p = \frac{w_1 + \lambda w_2}{1 + \lambda}, \quad p' = \frac{w_1 - \lambda w_2}{1 - \lambda}.$$

Παρατηρούμε ότι εάν ένα σημείο z ικανοποιεί τη σχέση $|z - w_1| = \lambda |z - w_2|$, τότε το συμμετρικό του z ως προς την ευθεία που διέρχεται από τα w_1, w_2 επίσης ικανοποιεί τη σχέση. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί να εξετάσουμε την υπόθεση ότι το σύνολο των σημείων που



Σχήμα 3.9: Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $|z - w_1| = 2|z - w_2|$.

ικανοποιούν την εξίσωση 3.20 βρίσκεται σε έναν κύκλο, με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία p και p' . Εάν αληθεύει αυτό, το κέντρο του κύκλου θα είναι το μέσο του διαστήματος από το p στο p' ,

$$\begin{aligned} c &= \frac{p + p'}{2} \\ &= \frac{(w_1 + \lambda w_2)(1 - \lambda) + (w_1 - \lambda w_2)(1 + \lambda)}{2(1 - \lambda^2)} \\ &= \frac{w_1 - \lambda^2 w_2}{1 - \lambda^2}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

και η ακτίνα του θα είναι

$$\begin{aligned} r &= \frac{|p - p'|}{2} \\ &= \frac{|(w_1 - \lambda w_2)(1 - \lambda) - (w_1 - \lambda w_2)(1 + \lambda)|}{2|1 - \lambda^2|} \\ &= \frac{\lambda|w_1 - w_2|}{|1 - \lambda^2|}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο c και ακτίνα r είναι

$$(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = r^2$$

και αντικαθιστώντας από τις 3.21, 3.22, έχουμε

$$(z(1 - \lambda^2) - w_1 + \lambda^2 w_2)(\bar{z}(1 - \lambda^2) - \bar{w}_1 + \lambda^2 \bar{w}_2) = \lambda^2(w_1 - w_2)(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)$$

η οποία απλοποιείται στη μορφή

$$z\bar{z} - z\bar{w}_1 - \bar{z}w_1 + w_1\bar{w}_1 = \lambda^2(z\bar{z} - z\bar{w}_2 - \bar{z}w_2 + w_2\bar{w}_2)$$

δηλαδή

$$|z - w_1|^2 = \lambda^2 |z - w_2|^2.$$

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των σημείων των οποίων οι αποστάσεις από δοθέντα σημεία έχουν σταθερό λόγο $\lambda \neq 1$ είναι ένας κύκλος.

Δραστηριότητα 3.22 Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων με εξίσωση $|z + 1| = \lambda |z - 1|$, για $\lambda = 2$ και για $\lambda = \frac{1}{2}$.

Η οικογένεια των κύκλων με εξισώσεις $|z - w_1| = \lambda |z - w_2|$, για $\lambda > 0$, ονομάζεται οικογένεια Απολλωνίων κύκλων. Παρατηρήστε ότι περιλαμβάνει και μία ευθεία, τη μεσοκάθετο των w_1 και w_2 , για $\lambda = 1$. Στην επόμενη παράγραφο θα συναντήσουμε ξανά αυτήν τη συγγένεια μεταξύ κύκλων και ευθειών στο μιγαδικό επίπεδο.

Οι απεικονίσεις αντιστροφής στο μιγαδικό επίπεδο

Στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ η απεικόνιση αντιστροφής $t \mapsto 1/t$ διατηρεί σταθερά τα σημεία 1 και -1 και απεικονίζει τα σημεία του διαστήματος $(0, 1)$ στο διάστημα $(1, \infty)$ και τα σημεία του διαστήματος $(-1, 0)$ στο διάστημα $(-\infty, -1)$, και αντίστροφα τα σημεία του διαστήματος $(1, \infty)$ στο διάστημα $(0, 1)$ και τα σημεία του διαστήματος $(-\infty, -1)$ στο διάστημα $(-1, 0)$. Η απεικόνιση αντιστροφής δεν ορίζεται στο 0.

Στο μιγαδικό επίπεδο θα θεωρήσουμε δύο απεικονίσεις αντιστροφής, την $z \mapsto 1/z$, την οποία θα ονομάσουμε **αναλυτική αντιστροφή**, και την $z \mapsto 1/\bar{z}$, την οποία θα ονομάσουμε **γεωμετρική αντιστροφή**. Και οι δύο αυτές απεικονίσεις ορίζονται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το 0.

Η αναλυτική αντιστροφή απεικονίζει το $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ στο $z^{-1} = r^{-1}(\cos \vartheta - i \sin \vartheta)$, δηλαδή στο σημείο του οποίου το μέτρο είναι το αντίστροφο του μέτρου του z , και το όρισμα είναι το αντίθετο του ορίσματος του z .

Η γεωμετρική αντιστροφή απεικονίζει το $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ στο $\bar{z}^{-1} = r^{-1}(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, δηλαδή στο σημείο του οποίου το μέτρο είναι το αντίστροφο του μέτρου του z , και το όρισμα είναι ίσο με το όρισμα του z . Η γεωμετρική αντιστροφή διατηρεί σταθερά τα σημεία στο μοναδιαίο κύκλο S^1 με κέντρο στο 0, για τα οποία $|z| = 1$, και στέλνει τα σημεία στο εσωτερικό του S^1 σε σημεία στο εξωτερικό του S^1 .

Θεωρούμε ένα κύκλο με κέντρο c και ακτίνα r , του οποίου τα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση $|z - c| = r$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την εικόνα του κύκλου από την απεικόνιση $f(z) = 1/z$, δηλαδή το σύνολο

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : w = \frac{1}{z}, |z - c| = r \right\} = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| \frac{1}{w} - c \right| = r \right\}.$$

Από την εξίσωση του κύκλου έχουμε

$$\left(\frac{1}{w} - c \right) \left(\frac{1}{\bar{w}} - \bar{c} \right) = r^2$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{w\bar{w}} - \frac{\bar{c}}{w} - \frac{c}{\bar{w}} + c\bar{c} &= r^2 \\ \frac{1 - \bar{c}\bar{w} - cw}{w\bar{w}} &= r^2 - c\bar{c}.\end{aligned}$$

Εάν $r^2 - c\bar{c} \neq 0$, η εξίσωση γίνεται

$$w\bar{w} = \frac{r^2 - c\bar{c}}{(r^2 - c\bar{c})^2} - \frac{\bar{c}\bar{w} + cw}{r^2 - c\bar{c}},$$

την οποία επεξεργαζόμαστε για να πάρουμε, διαδοχικά,

$$\begin{aligned}w\bar{w} + \frac{\bar{c}\bar{w}}{r^2 - c\bar{c}} + \frac{cw}{r^2 - c\bar{c}} + \frac{c\bar{c}}{(r^2 - c\bar{c})^2} &= \frac{r^2}{(r^2 - c\bar{c})^2} \\ \left(w - \frac{\bar{c}}{c\bar{c} - r^2}\right) \left(\bar{w} - \frac{c}{c\bar{c} - r^2}\right) &= \frac{r^2}{(c\bar{c} - r^2)^2} \\ \left|w - \frac{\bar{c}}{c\bar{c} - r^2}\right| &= \frac{r}{|c\bar{c} - r^2|}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Δηλαδή το σημείο w βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $\frac{\bar{c}}{c\bar{c} - r^2}$ και ακτίνα $\frac{r}{|c\bar{c} - r^2|}$.

Εάν $r^2 - c\bar{c} = 0$, η εξίσωση γίνεται

$$cw + \bar{c}\bar{w} = 1\tag{3.24}$$

που είναι η εξίσωση μίας ευθείας.

Δραστηριότητα 3.23 Δείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση (3.24) περνάει από το σημείο $\frac{1}{2c}$ και είναι κάθετη προς την ευθεία που διέρχεται από το 0 και το $\bar{c}$.

Παρόμοια αποτελέσματα βρίσκουμε και για τη γεωμετρική αντιστροφή $z \mapsto 1/\bar{z}$: Ο κύκλος $C : |z - c| = r$ απεικονίζεται στον κύκλο με κέντρο $\frac{c}{c\bar{c} - r^2}$ και ακτίνα $\frac{r}{|c\bar{c} - r^2|}$ εάν $r^2 - c\bar{c} \neq 0$, ενώ απεικονίζεται στην ευθεία με εξίσωση $\bar{c}w + c\bar{w} = 1$ εάν $r^2 - c\bar{c} = 0$.

Συνοψίζοντας, τόσο η αναλυτική αντιστροφή $z \mapsto 1/z$ όσο και η γεωμετρική αντιστροφή $z \mapsto 1/\bar{z}$ απεικονίζουν τον κύκλο C

- σε κύκλο, εάν $0 \notin C$
- σε ευθεία, εάν $0 \in C$,

και απεικονίζει την ευθεία ε

- σε κύκλο, εάν $0 \notin \varepsilon$
- σε ευθεία, εάν $0 \in \varepsilon$,

Δραστηριότητα 3.24 Βρείτε την εικόνα του κύκλου που υπολογίσατε στη Δραστηριότητα 3.22 από την αναλυτική και τη γεωμετρική αντιστροφή.