

Διάλεξη 12

Ρίζες πολυωνύμου βαθμού n . Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Θεώρημα 3.5 Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού n ,

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Τότε υπάρχουν n μιγαδικοί αριθμοί $w_1, \dots, w_n$, όχι υποχρεωτικά διαφορετικοί, τέτοιοι ώστε

$$p(z) = a_n(z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n).$$

Οι αριθμοί $w_1, \dots, w_n$ ονομάζονται **ρίζες** του πολυωνύμου $p(z)$. Εάν ακριβώς k από τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1, \dots, w_n$ είναι ίσοι με w , λέμε ότι w είναι ρίζα του $p(z)$ με **πολλαπλότητα** k . Τότε $(z - w)^k$ διαιρεί το πολυώνυμο $p(z)$, αλλά $(z - w)^{k+1}$ δεν το διαιρεί.

Είναι προφανές ότι οι ρίζες $w_1, \dots, w_n$ του πολυωνύμου $p(z)$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $p(z) = 0$, αφού

$$p(w_i) = a_n(w_i - w_1) \cdots (w_i - w_i) \cdots (w_i - w_n) = 0.$$

Θα δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι οι μόνες λύσεις της εξίσωσης $p(z) = 0$ είναι οι ρίζες $w_1, \dots, w_n$.

Πρόταση 3.6 Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού n ,

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Τότε $p(a) = 0$ εάν και μόνον εάν $z - a$ διαιρεί το πολυώνυμο $p(z)$.

Απόδειξη. Εάν $z - a$ διαιρεί το πολυώνυμο $p(z)$, τότε υπάρχει πολυώνυμο $q(z)$ τέτοιο ώστε $p(z) = q(z)(z - a)$. Αλλά τότε $p(a) = q(a)(a - a) = 0$.

Για να δείξουμε το αντίστροφο, χρησιμοποιούμε τον ευκλείδειο αλγόριθμο της διαίρεσης για πολυώνυμα: Για κάθε πολυώνυμο $p(z)$ και κάθε a υπάρχουν πολυώνυμα $q(z)$ και $r(z)$ τέτοια ώστε $p(z) = q(z)(z - a) + r(z)$, με το βαθμό του $r(z)$ μικρότερο από το βαθμό του $(z - a)$. Αλλά αφού $z - a$ είναι πρώτου βαθμού, $r(z)$ είναι σταθερό ή μηδενικό πολυώνυμο, $r(z) = c \in \mathbb{C}$. Εάν τώρα a είναι λύση της εξίσωσης $p(z) = 0$, έχουμε

$$0 = p(a) = q(a)(a - a) + c,$$

συνεπώς $c = 0$, και $p(z) = q(z)(z - a)$, δηλαδή a είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(z)$.

□

Ρίζες πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές

Θεωρούμε ένα πολυώνυμο βαθμού n ,

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

με πραγματικούς συντελεστές, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Εάν w είναι μία ρίζα του πολυωνύμου, ισχύει $a_n w^n + \cdots + a_1 w + a_0$. Αλλά τότε

$$0 = \overline{a_n w^n + \cdots + a_1 w + a_0} = a_n \bar{w}^n + \cdots + a_1 \bar{w} + a_0,$$

αφού $\bar{a}_n = a_n, \dots, \bar{a}_1 = a_1, \bar{a}_0 = a_0$. Συνεπώς, εάν w είναι μία ρίζα του πολυωνύμου, $\bar{w}$ είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου. Δηλαδή οι ρίζες ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές έρχονται σε ζευγάρια συζυγών μιγαδικών αριθμών. Εάν n είναι περιττός, $n = 2k + 1$, τότε μπορούν να υπάρχουν το πολύ k ζευγάρια μη πραγματικών συζυγών ριζών. Αυτό συνεπάγεται ότι τουλάχιστον μία ρίζα είναι πραγματική, αφού θα πρέπει να είναι ίση με το συζυγή της.

Ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο

Θεωρούμε ευθεία δ στο μιγαδικό επίπεδο. Με μία περιστροφή μπορούμε να φέρουμε τη δ να είναι παράλληλη με το φανταστικό άξονα. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η περιστροφή γύρω από το 0 κατά γωνία $-\vartheta$, για $0 \leq \vartheta < 2\pi$, απεικονίζει τη δ στην ευθεία η , που είναι παράλληλη με το φανταστικό άξονα και τέμνει τον πραγματικό άξονα στο σημείο $-\frac{c}{2}$, για $c \geq 0$. Τότε τα σημεία της ευθείας η αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς z με $\operatorname{Re} z = -\frac{c}{2}$. Αφού $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$, μία εξίσωση της ευθείας η είναι η

$$z + \bar{z} + c = 0.$$

Αντίστροφα, η ευθεία δ είναι η εικόνα της η από την περιστροφή γύρω από το 0 κατά γωνία ϑ , δηλαδή ένα σημείο z ανήκει στην ευθεία δ εάν και μόνο εάν το $(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))z$ ανήκει στην η . Συνεπώς μία εξίσωση της δ είναι η

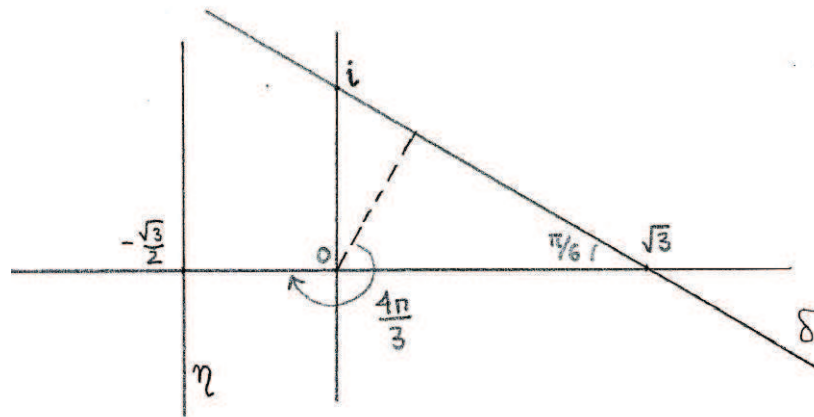
$$(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))z + \overline{(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))z} + c = 0.$$

Θέτουμε $u = \cos \vartheta + i\sin \vartheta$ και έχουμε την εξίσωση της δ στη μορφή

$$\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0,$$

όπου $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$ και $c \geq 0$.

Παράδειγμα 3.13 Θεωρούμε την ευθεία δ στο μιγαδικό επίπεδο που περνάει από τα σημεία i και $\sqrt{3}$, Σχήμα 3.7. Παρατηρούμε ότι τα σημεία 0 , i , $\sqrt{3}$ σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με γωνίες $\pi/3$ και $\pi/6$ και ύψος $\sqrt{3}/2$. Περιστρέφουμε γύρω από το 0 κατά γωνία $-4\pi/3$, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε με $\cos(-\frac{4\pi}{3}) + i\sin(-\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Αυτή η περιστροφή απεικονίζει το σημείο i στο $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, και το σημείο $\sqrt{3}$ στο $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$. Η ευθεία δ απεικονίζεται



Σχήμα 3.7: Εξίσωση ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο.

στην ευθεία η με εξίσωση $2\operatorname{Re} z = \sqrt{3}$. Θέτουμε $u = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Το σημείο z βρίσκεται στη δ εάν $\bar{u}z$ βρίσκεται στην η . Άρα η εξίσωση της δ είναι $\bar{u}z + u\bar{z} + \sqrt{3} = 0$.

Πρόταση 3.7 Για κάθε ευθεία δ στο μιγαδικό επίπεδο υπάρχουν $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$ και $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, τέτοια ώστε η δ έχει εξίσωση της μορφής

$$\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0. \quad (3.14)$$

Σε αυτή τη μορφή, $\frac{c}{2}$ είναι η απόσταση της ευθείας δ από το $0 \in \mathbb{C}$, και ο μιγαδικός αριθμός u αντιστοιχεί σε μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην ευθεία δ , ενώ ο $i u$ αντιστοιχεί σε μοναδιαίο διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας δ .

Δραστηριότητα 3.16 Σχεδιάστε στο μιγαδικό επίπεδο την ευθεία δ που περνάει από τα σημεία $2i$ και 2 . Βρείτε τις εικόνες των σημείων $2i$ και 2 από την περιστροφή f κατά γωνία $-5\pi/4$. Σχεδιάστε την ευθεία η που περνάει από αυτά τα σημεία. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας η στη μορφή $z + \bar{z} + c = 0$. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ στη μορφή 3.14.

Για να βρούμε τα σημεία στα οποία η ευθεία δ τέμνει τους άξονες, θέτουμε $z = \bar{z}$ (ο πραγματικός άξονας) ή $z = -\bar{z}$ (ο φανταστικός άξονας). Έτσι βρίσκουμε ότι εάν $\operatorname{Re} u \neq 0$, η ευθεία με εξίσωση $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$ τέμνει τον πραγματικό άξονα στο σημείο που δίδεται από την εξίσωση $\bar{u}z + uz + c = 0$, δηλαδή το σημείο $z = \frac{-c}{\bar{u}+u}$. Παρόμοια βρίσκουμε ότι εάν $\operatorname{Im} u \neq 0$, η ευθεία με εξίσωση $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$ τέμνει τον φανταστικό άξονα στο σημείο $z = \frac{-c}{\bar{u}-u}$.

Δραστηριότητα 3.17 Βρείτε τα σημεία τομής με τον πραγματικό και τον φανταστικό άξονα της ευθείας με εξίσωση $(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})z + (\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})\bar{z} + 3 = 0$.

Εάν πολλαπλασιάσουμε την 3.14 με οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό $t \neq 0$, έχουμε μία άλλη εξίσωση της ίδιας ευθείας:

$$t\bar{u}z + tu\bar{z} + tc = 0.$$

Θέτουμε $\alpha = \bar{t}u$, $\beta = tu$ και $\gamma = tc$. Αφού c είναι πραγματικός αριθμός, $\bar{c} = c$ και $\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} = \frac{\bar{t}}{t} = \frac{\alpha}{\beta}$. Συνεπώς οι μιγαδικοί αριθμοί α , β και γ ικανοποιούν τη σχέση $\alpha\gamma = \beta\bar{\gamma}$.

Πρόταση 3.8 Θεωρούμε εξίσωση της μορφής

$$\bar{\alpha}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0, \quad (3.15)$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha\beta \neq 0$.

Εάν $\gamma \neq 0$, η 3.15 παριστάνει ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο εάν και μόνον εάν $\alpha\gamma = \beta\bar{\gamma}$.

Εάν $\gamma = 0$, η 3.15 παριστάνει ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο εάν και μόνον εάν $|\alpha| = |\beta|$.

Η απόδειξη της Πρότασης 3.8 δίδεται στο τέλος του Κεφαλαίου.

Στο Ευκλείδειο επίπεδο E^2 με ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς, θεωρούμε την ευθεία δ με εξίσωση $ax + by + c = 0$. Γνωρίζουμε ότι (a, b) είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην ευθεία δ , ενώ $(-b, a)$ είναι ένα διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας δ . Για να εκφράσουμε την εξίσωση της ευθείας δ στο μιγαδικό επίπεδο αντικαθιστούμε $2x = 2\operatorname{Re} z = z + \bar{z}$ και $2y = 2\operatorname{Im} z = -i(z - \bar{z})$, και έχουμε $a(z + \bar{z}) - bi(z - \bar{z}) + 2c = 0$, ή

$$(a - bi)z + (a + bi)\bar{z} + 2c = 0.$$

Δραστηριότητα 3.18 Γράψτε σε μιγαδική μορφή την εξίσωση της ευθείας $3x + 5y = 1$.

Ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε μία ευθεία στο επίπεδο είναι ως τη μεσοκάθετο δύο σημείων. Εάν w_1 και w_2 είναι δύο σημεία του μιγαδικού επιπέδου, η μεσοκάθετος των δύο σημείων αποτελείται από τα σημεία z που ικανοποιούν την εξίσωση $|z - w_1| = |z - w_2|$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε $(z - w_1)(\bar{z} - \bar{w}_1) = (z - w_2)(\bar{z} - \bar{w}_2)$, που απλοποιείται σε $w_1\bar{w}_1 - \bar{w}_1z - w_1\bar{z} = w_2\bar{w}_2 - \bar{w}_2z - w_2\bar{z}$. Καταλήγουμε στην εξίσωση της μεσοκαθέτου των σημείων w_1 και w_2 του μιγαδικού επιπέδου, Σχήμα 3.8,

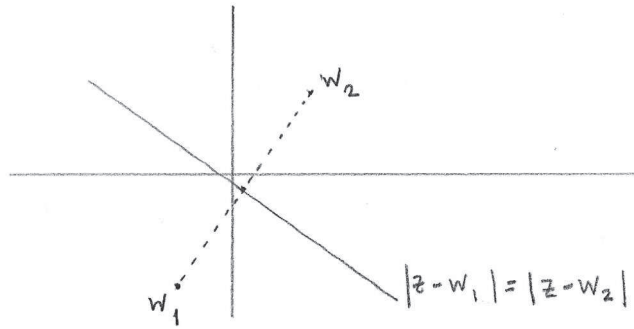
$$(\bar{w}_2 - \bar{w}_1)z + (w_2 - w_1)\bar{z} - (w_2\bar{w}_2 - w_1\bar{w}_1) = 0. \quad (3.16)$$

Δραστηριότητα 3.19 Η μεσοκάθετος των σημείων w_1 και w_2 περνάει από το σημείο $\frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ και είναι κάθετος στη διεύθυνση $w_2 - w_1$. Ελέγξτε ότι εάν αντικαταστήσετε $w = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ και $q = w_2 - w_1$ στην 3.17 παίρνετε την 3.16.

Εάν η ευθεία δ περνάει από το σημείο $w \in \mathbb{C}$ και έχει διάνυσμα διεύθυνσης που αντιστοιχεί στο μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό q , τότε κάθε σημείο z της ευθείας γράφεται στη μορφή

$$z = w + tq, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Αυτή είναι η παραμετρική περιγραφή της ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο. Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας απαλείφουμε το t από τη σχέση $z = w + tq$ και τη συζυγή της $\bar{z} = \bar{w} + t\bar{q}$:



Σχήμα 3.8: Εξίσωση μεσοκαθέτου στο μιγαδικό επίπεδο.

πολλαπλασιάζουμε με $\bar{q}$ και q αντίστοιχα, και έχουμε $\bar{q}z - \bar{q}w = t\bar{q}q = q\bar{z} - q\bar{w}$. Καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\bar{q}(z - w) - q(\bar{z} - \bar{w}) = 0.$$

Για να τη φέρουμε στη μορφή 3.14 πολλαπλασιάζουμε με $-i$,

$$-i\bar{q}(z - w) + iq(\bar{z} - \bar{w}) = 0$$

και θέτουμε $u = iq$. Καταλήγουμε στην εξίσωση της ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο που περνάει από το σημείο w και είναι κάθετη στη διεύθυνση του μιγαδικού αριθμού u ,

$$\bar{u}z + u\bar{z} - (\bar{u}w + u\bar{w}) = 0. \quad (3.17)$$

Δραστηριότητα 3.20 Βρείτε σε μιγαδική μορφή την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $-2 - i$ του μιγαδικού επιπέδου και είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση του $3 + i$.